

Estimation de la variance d'un modèle $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ II

On a

$$\mathbb{P}_\theta \left\{ x_{n,\alpha/2} \leq D_n(\sigma^2) = \frac{n \times \hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq x_{n,1-\alpha/2} \right\} = 1 - \alpha$$

Proposition 23 ($IC_{1-\alpha}(\sigma^2)$) pour une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m connue

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{n \hat{\sigma}^2}{x_{n,1-\alpha/2}}, \frac{n \hat{\sigma}^2}{x_{n,\alpha/2}} \right]$$

où $x_{n,\alpha/2}, x_{n,1-\alpha/2}$ sont les quantiles d'ordre $\alpha/2, 1 - \alpha/2$ d'une loi du chi-deux à n degrés de liberté.

Une démarche similaire permet de construire les intervalles unilatéraux.

Un exemple

Sur un échantillon de $n = 6$ parcelles, on a observé l'écart-type $\hat{s}_n^2 = 1$ sur le rendement en blé.

- On a donc $(n - 1)\hat{s}_n^2 = 5$.
- Avec un niveau de 0.95, on $x_{5,0.025} \approx 0.831$ et $x_{5,0.975} \approx 12.83$
- l'intervalle de confiance vaut

$$IC_{0.95}(\sigma^2) = \left[\frac{5}{12.83}, \frac{5}{0.831} \right] \approx [0.39, 6.02]$$

et pour l'écart-type, on peut proposer

$$IC_{0.95}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{5}{12.83}}, \sqrt{\frac{5}{0.831}} \right] \approx [0.625, 2.45]$$

Notons que cet estimateur de l'écart-type n'est pas le meilleur possible.

Estimation de la variance d'un modèle $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ III

2 La moyenne m est inconnue : on peut utiliser l'un des deux estimateurs de la variance

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2 \quad \tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2$$

et

$$D_n(\sigma^2) = \frac{n \times S_n^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{X}_n}{\sigma} \right)^2 = \frac{(n-1) \times \tilde{S}_n^2}{\sigma^2} = \tilde{D}_n(\sigma^2) \sim \chi_{n-1}^2$$

Proposition 24 ($IC_{1-\alpha}(\sigma^2)$) d'une loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec m inconnue

$$IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{n S_n^2}{x_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{n S_n^2}{x_{n-1,\alpha/2}} \right] = \left[\frac{(n-1) \tilde{S}_n^2}{x_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1) \tilde{S}_n^2}{x_{n-1,\alpha/2}} \right]$$

où $x_{n-1,\alpha/2}, x_{n-1,1-\alpha/2}$ sont les quantiles d'ordre $\alpha/2, 1 - \alpha/2$ d'une loi du chi-deux à $(n - 1)$ degrés de liberté.

Une région de confiance pour (m, σ^2) de $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

1 Utiliser les résultats précédents sur les $IC_{1-\alpha_0}(m)$ (avec σ^2 inconnu) et $IC_{1-(\alpha_1+\alpha_2)}(\sigma^2)$ (avec m inconnu) :

$$\mathbb{P}_\theta(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}_\theta(\bar{A} \cup \bar{B}) \geq 1 - \mathbb{P}_\theta(\bar{A}) - \mathbb{P}_\theta(\bar{B})$$

d'où pour tout $\theta \in \Theta = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta \left\{ -t_{n-1,1-\frac{\alpha_0}{2}} \leq D_n(m) \leq t_{n-1,1-\frac{\alpha_0}{2}}, \right. \\ \left. x_{n-1,\alpha_1} \leq D_n(\sigma^2) \leq x_{n-1,1-\alpha_2} \right\} \\ \geq 1 - \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_2) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

si $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

Ceci justifie l'utilisation du rectangle suivant comme région de confiance au niveau $1 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2)$:

$$IC_{1-(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)}(m, \sigma^2) = IC_{1-\alpha_0}(m) \times IC_{1-(\alpha_1+\alpha_2)}(\sigma^2)$$

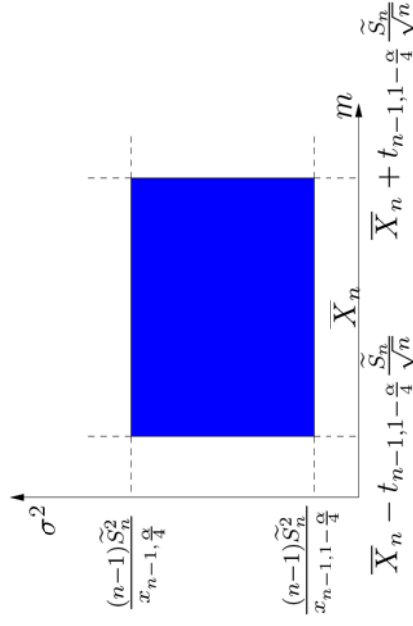
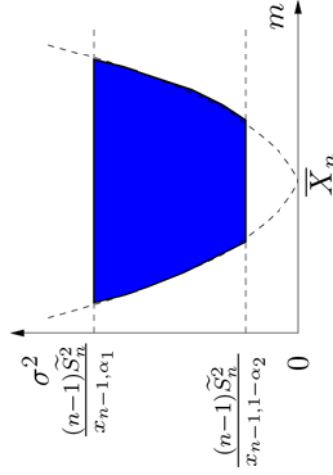


FIGURE 4: Région de confiance de niveau $1 - \alpha$ avec $\alpha_0 = \frac{\alpha}{2}, \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{4}$

Notons que pour obtenir un rectangle de confiance au niveau $1 - \alpha$, les intervalles utilisés pour chacun des paramètres seront tous plus larges que les $IC_{1-\alpha}$ individuels.

$$R_{1-\alpha}((m, \sigma^2)) = \left\{ \frac{\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2}{x_{n-1, 1-\alpha_2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2}{x_{n-1, \alpha_1}} \right. \\ \left. \frac{(\bar{X}_n - m)^2}{\sigma^2} \leq (z_{1-\alpha_0/2})^2 \right\}$$



Il donc possible de déterminer plusieurs régions de confiance de même niveau pour le couple (m, σ^2) : il faudrait définir des procédures de choix et de comparaison. ...

2 Utiliser une fonction pivot vectorielle comme

$$D_n(m, \sigma^2) := \left(\sqrt{n} \left[\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \right], \frac{(n-1)\tilde{S}_n^2}{\sigma^2} \right) \\ = \left(\sqrt{n} \left[\frac{\bar{X}_n - m}{\sigma} \right], \frac{\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} \right)$$

- Cette fonction est bien une fonction pivot pour $\theta = (m, \sigma^2)$, car les deux composantes sont indépendantes et de loi conjointe $\mathcal{N}(0, 1) \otimes \chi_{n-1}^2$.
- On a alors

$$\mathbb{P}_\theta \left\{ -z_{1-\alpha_0} \leq D_{1,n}(m, \sigma^2) \leq z_{1-\alpha_0}, x_{n-1, \alpha_1} \leq D_{2,n}(m, \sigma^2) \leq x_{n-1, 1-\alpha_2} \right\} \\ \stackrel{\text{ind.}}{=} (1 - \alpha_0)(1 - (\alpha_1 + \alpha_2)) = 1 - \alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_0(\alpha_1 + \alpha_2)$$

En choisissant $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ de façon à ce que

$\alpha_0 + (\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_0(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha$, on obtient une région de confiance de niveau $1 - \alpha$

Régression pour étudier des données de concentration en ozone

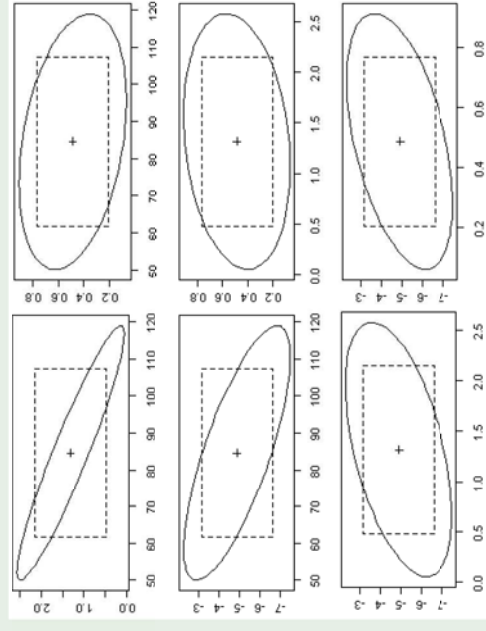


TABLE 1: Pour chacun des couples $(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j)$: superposition de la région de confiance conjointe au niveau 0.95 et du produit des intervalles de confiance de chacun des paramètres au niveau 0.95

Cas des échantillons non gaussiens

1 La région de confiance exacte devient rare mais ...

Exemple du modèle exponentiel $\text{Exp}(\theta)$:

- $\hat{\theta}_n = n/T_n$ et $T_n \sim \text{Ga}(n, \theta)$.
- (rappel PVP) $a^\alpha \text{Ga}(\alpha, \lambda)^\alpha \sim \text{Ga}(\alpha, \lambda/a)$ d'où : $\theta T_n \sim \text{Ga}(n, 1)$ puis $D_n(\theta) = 2\theta T_n \sim \text{Ga}(n, 1/2) = \chi_{2n}^2$
- $\forall \theta \in \Theta, \mathbb{P}_\theta \{x_{2n, \alpha/2} \leq D_n(\theta) = 2\theta T_n \leq x_{2n, 1-\alpha/2}\} = 1 - \alpha$
- d'où un intervalle de confiance au niveau $1 - \alpha$

$$\text{IC}_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{x_{2n, \alpha/2}}{2T_n}, \frac{x_{2n, 1-\alpha/2}}{2T_n} \right] = \left[\frac{x_{2n, \alpha/2} \hat{\theta}_n}{2n}, \frac{x_{2n, 1-\alpha/2} \hat{\theta}_n}{2n} \right]$$

- les 10 données sur les ampoules nous donnent au niveau 0.95 ($\hat{\theta}_{10} = 0.012$)

$$\begin{aligned} \text{IC}_{0.95}(\theta) &= \left[\frac{x_{20, 0.05/2}}{2T_{10}}, \frac{x_{20, 1-0.05/2}}{2T_{10}} \right] = \left[\frac{x_{20, 0.025}}{2 \sum_i x_i}, \frac{x_{20, 0.975}}{2 \sum_i x_i} \right] \\ &= \left[\frac{9.59}{1663}, \frac{34.2}{1663} \right] \approx [0.006, 0.02] \end{aligned}$$

Estimation de la moyenne m dans un modèle non-gaussien

- La loi de l'estimateur \bar{X}_n n'est généralement pas connue, et nous allons donner des intervalles de confiance asymptotiques pour m grâce à sa normalité asymptotique (TCL) que la variance σ^2 soit connue ou non.
- On obtient alors pour des grands échantillons

$\text{IC}_{1-\alpha}(m)$ asymptotique avec des grands échantillons

On ne donne que les intervalles bilatéraux au niveau $1 - \alpha$ dans le cas où la variance est connue puis estimée.

- (a) σ^2 connue : $\text{IC}_{1-\alpha}(m) = [\bar{X}_n \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$
- (b) σ^2 inconnue : $\text{IC}_{1-\alpha}(m) = [\bar{X}_n \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}]$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ d'une $\mathcal{N}(0, 1)$.

Notons qu'ici, avec l'hypothèse de grands échantillons, on peut alternativement utiliser S_n^2 ou S_n^2 comme estimateur d'une variance inconnue

2 Région de confiance asymptotique : un outil, la normalité asymptotique.

Définition 27 (Suite de fonction asymptotiquement « pivotale »)

Soit $D_n(g(\theta))$ une fonction définie sur $E_X^n \times g(\Theta)$ à valeurs dans un certain espace mesurable. La suite de fonctions $\{D_n(g(\theta))\}_{n \geq 1}$ est dite asymptotiquement « pivotale »

- (a) $\forall n \geq 1, \forall \theta \in g(\Theta) : x_n \mapsto D_n(g(\theta))$ est mesurable et
- (b) $\forall \theta \in \Theta, D_n(g(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \nu$ où ν est une loi de probabilité indépendante de θ .

Région de confiance asymptotique

Pour n assez grand, on peut approcher la loi de $D_n(g(\theta))$ par ν et en déduire des régions de confiance asymptotiques pour $g(\theta)$ de la même manière qu'avec une fonction pivot.

Supposons que la région R (de frontière de ν -mesure nulle) soit défini par $\nu(R) = 1 - \alpha$. Alors

$$\mathbb{P}_\theta \{D_n(g(\theta)) \in R\} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \nu(R) = 1 - \alpha.$$

Et il reste à pratiquer comme dans le cas d'une fonction pivot...

Effet du sous-salicylate de bismuth chez les nourrissons

Un essai sur plusieurs centaines de nourrissons atteints de diarrhée pour tester l'effet du sous-salicylate de bismuth sur la réduction la quantité de diarrhée. Un tiers d'entre eux ont reçu une faible dose sous-salicylate de bismuth, un tiers une dose plus importante et un tiers a reçu un placebo. Les auteurs [1] ont enregistré la réponse clinique des enfants de plusieurs façons. On s'intéresse ici qu'à la seule quantité totale de selles produits et on ne compare que les sujets contrôlés avec ceux qui ont reçu une faible dose. En fait la mesure sera la quantité de selles (ml) divisé par le poids corporel (kgs) et on compare les deux groupes via cette mesure quantitative continue.

 D. Figueiroa-Qintanilla et al.

A controlled trial of bismuth subsalicylate in infants with acute watery diarrheal disease. N. Engl. J. Med 328 :1653-1658, 1993, 2006.

	Placebo	Traités
Production moyenne	$\bar{X}_{84} = 260\text{ml}/\text{kgs}$	$\bar{X}_{85} = 182\text{ml}/\text{kgs}$
Ecart-type empirique	$\sqrt{s_{84}^2} = 254\text{ml}/\text{kg}$	$\sqrt{s_{85}^2} = 197\text{ml}/\text{kg}$

- Les quantités de selles produites ne peuvent pas représentées un échantillon d'une loi normale. Considérons les sujets ayant reçu un placebo. Si la variable devait suivre une loi normale, on sait que plus de 95% des valeurs d'une telle loi sont compris entre $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ et si on reporte les estimations des deux paramètres, on obtient $[-248, 768]$. Donc de nombreuses valeurs devraient être négatives, ce qui n'est pas cohérent avec une mesure de production de selles
- Comme les tailles d'échantillons sont grandes, on peut tout de même construire des IC approchés qui sont ici

$$IC_{0,95}^{\text{placebo}}(m) = [260 \pm 1.96 \frac{254}{\sqrt{84}}] = [260 \pm 27.7] \approx [205\text{ml}/\text{kgs}, 315\text{ml}/\text{kgs}]$$

$$IC_{0,95}^{\text{traités}}(m) = [182 \pm 1.96 \frac{197}{\sqrt{85}}] = [182 \pm 21.4] \approx [139\text{ml}/\text{kgs}, 225\text{ml}/\text{kgs}]$$

Notons que les deux intervalles se recoupent à peine.

- Pour étudier l'efficacité, cet exemple suggère de comparer les deux groupes plutôt que se focaliser sur chacun d'eux.

- Une autre idée, remplacer $\Sigma(\theta)$ par une estimation consistante :

$$\Sigma(\hat{\theta}_n) = \hat{\theta}_n(1 - \hat{\theta}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{P} \Sigma(\theta).$$

On a toujours

$$D_n(\theta) = \sqrt{n} \Sigma(\hat{\theta}_n)^{-1/2} [\hat{\theta}_n - \theta] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

d'où

$$(42) \quad IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\hat{\theta}_n \pm z_{1-\alpha/2} \frac{(\Sigma(\hat{\theta}_n))^{1/2}}{n} \right]$$

Cet exemple est assez caractéristique de ce que l'on peut faire à partir d'une propriété de normalité asymptotique faisant apparaître une variance asymptotique $\Sigma(\theta)$ « régulière ».

Estimation dans un modèle $\text{Ber}(\theta)$ avec $\theta \in]0, 1[$

- l'EMV : $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$ et le TCL nous dit que

$$D_n(\theta) = \sqrt{n} \left[\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\iff \sqrt{n}[\hat{\theta}_n - \theta] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma(\theta) = \theta(1-\theta))$$

On peut alors construire une région de confiance au niveau $1 - \alpha$

$$n(\hat{\theta}_n - \theta)^2 \leq \Sigma(\theta) z_{1-\alpha/2}^2.$$

Cette inégalité quadratique en θ peut être résolue en θ et donne

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\frac{2\hat{\theta}_n + z_{1-\alpha/2}^2/n \pm \sqrt{(2\hat{\theta}_n + z_{1-\alpha/2}^2/n)^2 - 4\hat{\theta}_n^2(1 + z_{1-\alpha/2}^2/n)}}{2(1 + z_{1-\alpha/2}^2/n)} \right]$$

Une situation relativement « générique » I

Proposition 25

Pour un paramètre θ avec Θ un ouvert de \mathbb{R} , si $\hat{\theta}_n$ un estimateur asymptotiquement normal de θ de variance asymptotique $\Sigma(\theta)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- la fonction $\theta \mapsto \Sigma(\theta)$ est continue sur Θ ;
 - la variance $\Sigma(\theta)$ est strictement positive pour tout $\theta \in \Theta$;
- alors on peut choisir comme intervalle de confiance asymptotique au niveau $1 - \alpha$

$$IC_{1-\alpha}(\theta) = \left[\hat{\theta}_n \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\Sigma(\hat{\theta}_n)}{n}} \right]$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Rappelons que si $\hat{\theta}_n$ est asymptotiquement efficace alors $\Sigma(\theta) = I_1(\theta)^{-1}$. Nous avons vu des conditions sous lesquelles l'EMV rentre dans ce cadre (Th 18).

Une situation relativement « générique » II

La précédente situation peut élargie via la delta-méthode pour couvrir le cas de l'estimation d'une fonction $g(\theta)$ de θ (voir Th 13) :

Proposition 26

Pour Θ un ouvert de \mathbb{R} , $\hat{\theta}_n$ un estimateur asymptotiquement normal de θ de variance asymptotique $\Sigma(\theta)$ vérifiant les conditions de la Pro 25. Si g est une fonction continûment dérivable et de dérivée non nulle sur Θ alors

$$IC_{1-\alpha}(g(\theta)) = \left[g(\hat{\theta}_n) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{g'(\hat{\theta}_n)^2 \Sigma(\hat{\theta}_n)}{n}} \right]$$

où $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha/2$ d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Une situation relativement « générique » IV

un exemple : le cas $\theta = (m, \sigma^2)$ d'un modèle gaussien $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{N}(\theta)$

On travaille avec une famille exponentielle de lois dont la matrice d'information de Fisher pour une observation est donnée par

$$I_1(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^4} \end{pmatrix}$$

- Cette matrice est inversible pour tout $\theta \in \Theta = \mathbb{R} \times]0, \infty[$ donc le modèle est identifiable et elle est continue comme fonction de θ .
- On sait d'après le Th 18 que l'EMV $\hat{\theta}_n = (\bar{X}_n, S_n^2)$ de θ est asymptotiquement efficace, avec pour matrice de covariance asymptotique $\Sigma(\theta) = I_1(\theta)^{-1}$.
- Alors la région (43) prend la forme

$$\begin{aligned} R_{1-\alpha}(\theta) &= \left\{ n(\hat{\theta}_n - \theta)^\top I_1(\hat{\theta}_n)(\hat{\theta}_n - \theta) \leq x_{2,1-\alpha} \right\} \\ &= \left\{ \frac{n(m - \bar{X}_n)^2}{S_n^2} + \frac{n(\sigma^2 - S_n^2)^2}{S_n^4} \leq x_{2,1-\alpha} \right\} \end{aligned}$$

Une situation relativement « générique » III

Les deux précédents énoncés se « généralisent » au cas d'un Θ ouvert convexe de \mathbb{R}^p en reformulant les conditions des résultats précédents dans le cadre multidimensionnel (voir Th 16 pour la méthode-Delta) et en utilisant le Cor 6.

Par exemple, à partir de la normalité asymptotique

$$\sqrt{n} \Sigma(\hat{\theta}_n)^{-1/2} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I_p)$$

On obtient en combinant avec le Cor 6 que

$$n(\hat{\theta}_n - \theta)^\top \Sigma(\hat{\theta}_n)^{-1} (\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \chi_p^2$$

d'où une région de confiance asymptotique de la forme suivante :

$$(43) \quad R_{1-\alpha}(\theta) = \left\{ n(\hat{\theta}_n - \theta)^\top \Sigma(\hat{\theta}_n)^{-1} (\hat{\theta}_n - \theta) \leq x_{p,1-\alpha} \right\}$$

où $x_{p,1-\alpha}$ est le quantile d'ordre $1 - \alpha$ d'une loi χ_p^2 (ellipsoïde de \mathbb{R}^p).

Quelques remarques

- Reprenons quelques régions de confiance simples :

$$\begin{aligned} IC_{1-\alpha}(p) &= \left[\bar{X}_n \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}{n}} \right] \\ IC_{1-\alpha}(m) &= \left[\bar{X}_n \pm z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \end{aligned}$$

- 1 Si n est fixé : si α diminue ou encore le niveau $1 - \alpha$ augmente alors l'intervalle s'élargit, i.e. on augmente la largeur pour avoir plus de chance que la vraie valeur du paramètre se trouve dans l'intervalle obtenu.
- 2 Pour un niveau $1 - \alpha$ fixé : si n devient de plus en plus grand alors la largeur de l'intervalle a tendance à diminuer. L'incertitude diminue avec la taille des données

Introduction aux tests d'hypothèses paramétriques

- **L'estimation de paramètres par région de confiance :**
 - Idée générale : comment à partir d'un échantillon, trouver les valeurs des paramètres qui soient compatibles au niveau $1 - \alpha$ avec celui-ci : la région de confiance dans laquelle on a $(1 - \alpha)\%$ de chances de trouver la véritable valeur du paramètre inconnu.
 - Autrement dit, à un jeu de données, on associe un ensemble de paramètres compatibles avec un degré de confiance élevé
- **Idée générale d'un test d'hypothèse :**
 - Construire une procédure ou règle de décision permettant de trancher entre deux alternatives H_0 et H_1 sur les paramètres d'un modèle mais sur la seule base des données observées. À cette procédure, on associera plusieurs formes de risque de prise d'une mauvaise décision
 - Ici, le principe est que les paramètres du modèle sont « fixés » et on va chercher quel est l'ensemble des observations compatibles avec l'hypothèse de base H_0 (sa taille dépendra des risques d'erreur dont on fixera l'amplitude à l'avance).

- **Une première forme d'erreur est de rejeter à tort H_0 , autrement dit on décide que $p \neq p_0$ alors que $p = p_0$.** Cette probabilité $\mathbb{P}\{\text{décider que } H_1 \text{ est vraie} \mid H_0 \text{ est vraie}\}$ est fixée comme étant au pire α et α est généralement appelé le seuil du test.
- **Comment trancher entre H_0 et H_1 ?**
 - 1 Déterminer l'ensemble $A_{1-\alpha}(p_0)$ des valeurs observables de $\hat{p} = \bar{X}_{2755}$ qui soient compatibles avec H_0 , de sorte que la probabilité de rejeter à tort H_0 soit α ?
 - 2 Une idée :
 - on a déterminé un ensemble des valeurs du paramètre p qui soient compatibles avec la valeur observée $\bar{X}_{2755} = 0.517$. Cet ensemble contient la vraie valeur de p avec probabilité $1 - \alpha$.
 - **Une règle de décision :** conserver H_0 , i.e. $p = p_0 = 1/2$, ssi $p_0 = 1/2$ est une valeur compatible du paramètre pour les observations avec probabilité $1 - \alpha$:

$$(44a) \quad \bar{X}_{2755} \in A_{1-\alpha}(p_0) \iff p_0 \in IC_{1-\alpha}(p)$$
 Alors

$$(44b) \quad \mathbb{P}\{\bar{X}_{2755} \in A_{1-\alpha}(p_0)\} = \mathbb{P}\{p_0 \in IC_{1-\alpha}(p)\} = 1 - \alpha$$

$$(44c) \quad \mathbb{P}\{\text{décider que } p_0 \neq 1/2 \mid H_0 \text{ est vraie}\} = \mathbb{P}\{p_0 \in IC_{1-\alpha}(p)\} = \alpha$$

Un exemple : le croisement de rats

Il s'agit d'étudier la transmission d'un gène à un descendant lors d'un croisement d'un couple de rats. Un postulat de base est que le gène est transmis avec probabilité $p = 1/2$ chez un descendant.

- À partir de 2755 observations, on obtient une estimation ponctuelle de p

$$\hat{p}_{2755} \approx 0.517$$

et l'intervalle de confiance au niveau 0.95 (voir (42))

$$IC_{0.95}(p) = [0.517 \pm 0.0187] \approx [0.498, 0.5356].$$

Autrement dit, on a 95% de chances que la véritable valeur de p se trouve entre 0.498 et 0.5356.

- Une question naturelle est alors : au vu des données, peut-on conserver comme postulat de base que la vraie valeur de p soit $p_0 = 1/2$?

H_0 : $p = p_0$ avec $p_0 = 1/2$ ici
 H_1 : contre l'alternative $p \neq p_0$

Conclusion : si on fixe un seuil $\alpha = 0.05$ de rejeter à tort l'hypothèse H_0 : $p_0 = 1/2$ alors la formule (44a) devient à l'aide de la forme (42) de l'IC :

$$\begin{aligned} p_0 \in IC_{0.95}(p) &\iff p_0 \in \left[\bar{X}_{2755} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\bar{X}_{2755}(1 - \bar{X}_{2755})}{2755}} \right] \\ &\iff \bar{X}_{2755} \in \left[p_0 \pm 1.96 \sqrt{\frac{\bar{X}_{2755}(1 - \bar{X}_{2755})}{2755}} \right] := A_{0.95}(p_0) \\ &\iff D_{2755}(p_0) := \frac{\bar{X}_{2755} - p_0}{\sqrt{\frac{\bar{X}_{2755}(1 - \bar{X}_{2755})}{2755}}} \in [-1.96, 1.96] \end{aligned}$$

Décision : en reportant la valeur de $\bar{X}_{2755} = 0.517$, on trouve que $A_{0.95}(1/2) = [0.5 \pm 0.0187] = [0.4813, 0.5187]$ et comme $\bar{X}_{2755} = 0.517 \in [0.4813, 0.5187]$, on conserve l'hypothèse H_0 . Les données ne permettent pas de la remettre en cause avec un risque d'erreur de moins de 5%.

- Notons tout d'abord que l'on conserve l'hypothèse que $p_0 = 1/2$ si l'estimation \bar{X}_{2755} de p n'est trop éloignée de p_0 .
- Dans la terminologie classique,
 - la quantité $D_{2755}(p_0)$ est souvent appelée la **fonction de décision du test**,
 - $A_{0.95}(p_0)$ est la région de conservation ou d'acceptation de H_0 . Sa largeur dépend directement du seuil α choisi.
 - L'ensemble complémentaire de $A_{0.95}(p_0)$ est appelée la **région de rejet** (de H_0) **du test** et souvent notée $IC_{0.95}(p_0)$. Cette région correspond aux valeurs incompatibles avec l'hypothèse initiale H_0 .