Consistance

Définition 21 (Diverses formes de consistance)

Une suite d'estimateurs $\{\widehat{\theta}_n\}_{n\geq 1}$ *d'un paramètre* $g(\theta) \in \mathbb{R}^p$ *est dite*

1. *consistante (ou convergente) si* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} g(\theta)$, *i.e.*

$$(19) \qquad \forall \theta \in \Theta, \forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_\theta\{\|\widehat{\theta}_n - g(\theta)\| > \varepsilon\} = 0$$

2. *fortement consistante si* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} g(\theta)$, *i.e.*

$$(20) \qquad \forall \theta \in \Theta, \quad \mathbb{P}_\theta\left\{\|\widehat{g(\theta)}_n - g(\theta)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\} = 1$$

3. *consistante en moyenne quadratique (pour* $\widehat{\theta}_n$ *de carré intégrable) si* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{EQM}} g(\theta)$, *i.e.*

$$(21) \qquad \forall \theta \in \Theta, \quad \mathrm{EQM}_{g(\theta)}(\widehat{\theta}_n) = \mathbb{E}_\theta\left[\|\widehat{\theta}_n - g(\theta)\|^2\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Remarque 13

- La convergence d'une suite de vecteurs aléatoires selon l'un des trois modes précédents est équivalente à la convergence composante par composante.
- Notons que la consistance en moyenne quadratique correspond à la notion de convergence dans $L^2(\mathbb{P}_\theta)$ pour tout θ. Rappelons que la convergence dans $L^2(\mathbb{P}_\theta)$ implique la convergence en $L^1(\mathbb{P}_\theta)$.
- Rappelons les relations directes entre ces trois modes de convergence

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} & \Longrightarrow & \xrightarrow[n\to+\infty]{P} \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{EQM}} & \nearrow & \end{array}$$

Cas gaussien indépendant

Si $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes avec $Y_n \sim \mathcal{N}(m, \sigma_n^2)$ alors

$$Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} m \iff \sigma_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Nous allons nous concentrer que le cas **d'un paramètre** $g(\theta) \in \mathbb{R}$ **unidimensionnel**.

- Les deux outils de base pour étudier la consistance et la consistance en moyenne quadratique sont
  - l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_\theta\{|\widehat{\theta}_n - g(\theta)| > \varepsilon\} \\ (22) \qquad &\leq \frac{\mathbb{E}_\theta\left[|\widehat{\theta}_n - g(\theta)|^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{EQM}_{g(\theta)}(\widehat{\theta}_n)}{\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

  - la décomposition biais-variance (13)

$$(23) \qquad \mathrm{EQM}_{g(\theta)}(\widehat{\theta}_n) = V_\theta(\widehat{\theta}_n) + b_{g(\theta)}(\widehat{\theta}_n)^2$$

Proposition 14

1. *Si* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{EQM}} g(\theta)$ *alors* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} g(\theta)$. *Si* $\widehat{\theta}_n$ *est un ESB alors* $V_\theta(\widehat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow \widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} g(\theta)$.
2. *Si le biais et la variance d'un estimateur* $\widehat{\theta}_n$ *de* $g(\theta)$ *tendent vers* 0 *alors* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{EQM}} g(\theta)$. *Si* $\widehat{\theta}_n$ *est un ESB alors* $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{EQM}} g(\theta) \iff V_\theta(\widehat{\theta}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Moyenne empirique

- $\widehat{\theta}_n = \overline{X}_n$ est un ESB de la moyenne $\theta = m$ de la loi commune de l'échantillon, qui est (fortement) consistant et consistant en moyenne quadratique si la loi commune admet une variance finie.
- Notons que si les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, de même moyenne $\theta = m$ mais de variances différentes $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ (plus un n-échantillon), alors $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{EQM}} \theta$ si

$$(24) \qquad \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 = o(n^2)$$

  - Si la suite $\{\sigma_i^2\}_{i\geq 1}$ est décroissante alors ok
  - Si la suite $\{\sigma_i^2\}_{i\geq 1}$ est croissante alors cette croissance ne doit pas être trop rapide :

$$\sigma_i^2 = Ci^\alpha \text{ avec } 0 < \alpha < 1 \text{ car } \sum_{i=1}^n i^\alpha \sim \frac{n^{1+\alpha}}{1+\alpha} \text{ pour } \alpha > 0$$

En résumé, $\overline{X}_n$ est un estimateur consistant (selon les 3 modes) de m lorsque (24) est satisfaite. Quand cette dernière ne l'est pas, alors il peut ne pas être consistant, cela dépend des lois des v.a. $X_1, \ldots, X_n$.

Proposition 15 (Rappels sur les suites (fortement) consistantes)

Soit une suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de v.a. toutes définies sur le même espace probabilisé telle que, pour une certaine constante réelle a,

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} a.$$

1. *Si $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ est une autre suite de v.a. définies sur l'espace probabilisé associé à $\{X_n\}_{n\geq 1}$ et telle que $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} b$ alors*

$$\begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} a+b \\ X_nY_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} ab \\ \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} \frac{a}{b} \text{ pourvu que } b \neq 0 \end{cases}$$

2. *Si f est continue au point a alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} f(a)$.*

Cas multidimensionnel

- La propriété 2 de la précédente proposition se généralise aux suites de vecteurs aléatoires. Elle est également valable lorsque la limite de $\{X_n\}_{n\geq 1}$ est un vecteur aléatoire X pourvu que la fonction f soit continue sur un ensemble de $\mathbb{P}_X$-probabilité 1. Voir e.g. [Ser80, Chap 1]
- Le résultat dans le cas vectoriel permet d'en déduire la propriété utile suivante :

  Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} X$ avec X_n vecteur aléatoire de dimension k alors pour toutes matrices $A \in M_{p,k}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{k,k}(\mathbb{R})$,

$$AX_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} AX \quad \text{et} \quad {X_n}^\top BX_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} X^\top BX$$

Exemples

1. La stabilité de la propriété de consistance par une transformation continue est particulièrement utile dans le cadre de l'EMV d'une fonction $g(\theta)$ du paramètre θ.
   - Si $\widehat{\theta}_n$ est un EMV (fortement) consistant de θ et g est continue sur Θ alors l'EMV $g(\widehat{\theta}_n)$ de $g(\theta)$ est également (fortement) consistant.
   - Par exemple, $\overline{X}_n$ est l'EMV du paramètre θ d'un modèle Poisson et $\exp(-\overline{X}_n)$ est l'EMV de

$$g(\theta) = \exp(-\theta) = \mathbb{P}_\theta\{X_1 = 0\}$$

   Comme $\overline{X}_n$ est (fortement) consistant, $\exp(-\overline{X}_n)$ l'est également.

Exemples suite

2. Les moments empiriques $\overline{X^k}_n$ et les moments empiriques centrés $\widehat{\mu}_k$ sont des estimateurs (fortement) consistants des les moments théoriques correspondants m_k et μ_k : $\forall\theta$

$$\overline{X^k}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n {X_i}^k \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} m_k(\theta) := \mathbb{E}_\theta[{X_1}^k]$$

$$\widehat{\mu}_k := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{P,ps} \mu_k(\theta) := \mathbb{E}_\theta\left[\{X_1 - m_1(\theta)\}^k\right]$$

3. De plus, on peut montrer que pour $k \geq 1$ [Ser80, Chap 2] : $\forall\theta \in \Theta$

$$\mathbb{E}_\theta[\overline{X^k}_n] = m_k(\theta) \qquad V_\theta\left(\overline{X^k}_n\right) = \frac{m_{2k}(\theta) - m_k(\theta)^2}{n}$$

$$\mathbb{E}_\theta[\widehat{\mu}_k] = \mu_k(\theta) + O(1/n) \qquad V_\theta(\widehat{\mu}_k) = O(1/n)$$

   On en déduit que le moments empiriques (centrées) des estimateurs des moments (centrés) théoriques (asymptotiquement) sans biais et sont également consistants en moyenne quadratique.

   Les propriétés précédentes couvrent le cas particulier des estimateurs S_n^2 et $\widetilde{S}_n^2$ de la variance.

Cas des EMM

- On sait que les estimateurs empiriques sont consistant selon les trois modes proposés. La méthode des moments fournit des estimateurs de $g(\theta)$ qui, quand ils existent, sont des fonctions f de ces moments empiriques.
- La consistance pour l'EMM sera garantit si la fonction f possède de bonnes propriétés. Un exemple à l'aide de Prop 15-2. :

Proposition 16 (La (forte) consistance des EMM)

En supposant que l'EMM $\widehat{\theta}_n = f(\overline{X}_n, \ldots \overline{X^k}_n)$ de $g(\theta)$ existe et est unique, si f est continue en $(m_1, \ldots m_k)$ alors $\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P.ps} g(\theta)$.

Sous des conditions de régularité plus fortes sur f [Cra46, p. 354], il peut être montré $\widehat{\theta}_n$ est asymptotiquement sans biais et même consistant en moyenne quadratique.

Remarque 14 (cas des vecteurs aléatoires)

Ce résultat se généralise au cas des vecteurs aléatoires.

H. Cramér.
Mathematical methods of statistics. Princeton Univ. Press, 1946.

Cas des EMV

- L'EMV, quand il existe, tend à être un estimateur consistant. Cependant, les conditions sous lesquelles la consistance est établie sont le plus souvent trop restrictives pour être utiles en pratique [Vaa98].
- On peut alors développer une théorie plus simple mais qui n'est plus relative à un maximum global de la vraisemblance mais à un maxima local. Autrement dit, on s'intéresse à une suite $\{\widehat{\theta}_n\}_{n\geq 1}$ de maxima locaux de la fonction de vraisemblance. On peut alors obtenir un résultat du type :

Théorème 8 (admis [Mon97, p. 107])

Supposons les conditions suivantes satisfaites

1. *Θ est un ouvert de $\mathbb{R}$*
2. *le modèle statistique est identifiable*
3. *le modèle statistique est homogène*
4. *$(dL/d\theta)(\theta, x)$ existe pour tout x et tout $\theta \in \Theta$*

Il existe une suite $\{\widehat{\theta}_n\}_{n\geq 1}$ de maxima locaux de la fonction de vraisemblance (donc de racines des équations de vraisemblances successives) qui est (fortement) consistante.

Remarque 15

1. Notons que la précédent résultat ne garantit en rien l'existence d'un maxima local pour toute observation $(x_1, \ldots, x_n)$.
2. Il y a bien sûr un problème lorsqu'il existe plusieurs maximas locaux. Le théorème ne dit rien sur le choix du « bon » maxima.
3. On peut déduire du précédent théorème le corollaire suivant :

Corollaire 2

Sous les hypothèses du Théorème 8, si l'équation de vraisemblance (9), $(\ln L_n)' = 0$, admet une unique racine $\widehat{\theta}_n$ pour chaque n et tout $(x_1, \ldots, x_n)$, alors

1. *la racine $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur consistant de θ*
2. *avec probabilité tendant vers 1 quand $n \to +\infty$, $\widehat{\theta}_n$ est l'EMV.*

4. Notons que pour une famille exponentielle, un maxima local est nécessairement global. De plus, 2. est satisfaite si $I(\theta) > 0$ pour tout θ, et 3. est automatiquement satisfaite.

Qqs commentaires sur le corollaire

1. Clair d'après le Théorème 8.
2. Si l'éq. de vraisemblance admet une unique racine, alors il peut s'agir d'un maxima local, minima local ou d'un point d'inflexion de $\ln L_n$.
   Dans les deux derniers cas, on ne peut avoir alors de maxima local. D'après le Théorème 8, ces deux possibilités ne peuvent arriver qu'avec une probabilité tendant vers 0.
   Maintenant, par unicité de la racine, tout maxima local de l'éq. de vraisemblance représente l'EMV.

Normalité asymptotique

Motivation pour la normalité asymptotique

- Si on travaille avec un modèle statistique gaussien $\{\mathcal{N}(\theta), \theta = (m, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\}$ alors on sait, par exemple, que d'après la Prop 9
  - $\overline{X}_n$ et S_n^2 sont indépendants
  - $\sqrt{n}\left[\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right] \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2 \sim \chi_n^2$
  - $\frac{nS_n^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 \sim \chi_{n-1}^2$, $\sqrt{n-1}\left[\frac{\overline{X}_n - m}{S_n}\right] \sim st_{n-1}$
  - ...
- Modèle gaussien multidimensionnel : hypothèse centrale dans l'analyse statistique du modèle linéaire
- La connaissance des lois exactes des estimateurs permettent de construire des outils d'analyse d'échantillons, tels que des intervalles de confiance ou des tests d'hypothèses, fondés sur des « résultats exacts ». Autrement dit, les procédures mises en place n'utiliseront aucune approximation probabiliste des v.a.

Quid de l'inférence sans hypothèse d'échantillons gaussiens ?

- Possible de transposer les résultats des échantillons gaussiens dans le cas des grands échantillons généraux, i.e.
  pour des **échantillons de grande taille**
- Principaux outils : convergence en loi et théorème central limite
  1. Rappels et compléments sur la convergence en loi et le TCL pour les échantillons (cas unidimensionnel puis multidimensionnel)
  2. Quelques propriétés des EMV et EMM

Convergence en loi : cas des v.a. réelles

Théorème et définition de la cv en loi (cf cours de proba.)

Une suite $\{X_n\}_{n\geq 0}$ de v.a. (définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$) est dite convergente en loi vers une v.a. X ssi l'une des 3 conditions suivantes est réalisée pour tout $\theta \in \Theta$

1. la suite des fonctions de répartition $\{F_{X_n}\}_{n\geq 0}$ convergent ponctuellement en tout point de continuité de la fonction de répartition de X : si F_X est continue en t
$$F_{X_n}(t) := \mathbb{P}\{X_n \leq t\} \xrightarrow[n\to+\infty]{} F_X(t)$$
2. pour toute fonction continue bornée f à valeurs réelles,
$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[f(X)]$$
3. la suite des fonctions caractéristiques $\{\varphi_{X_n}\}_{n\geq 0}$ converge en tout point de $\mathbb{R}$ vers φ_X :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{X_n}(t) := \mathbb{E}[\exp(itX_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(t)$$

Dans ce cas, on écrit $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ ou $X_n \Longrightarrow X$

Définition 22 (Suite bornée en probabilité)

Une suite de v.a. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ est dite bornée en probabilité si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante K et un entier n_0 tels que
$$\forall n \geq n_0, \quad \mathbb{P}\{|X_n| \leq K\} \geq F_{X_n}(K) - F_{X_n}(-K) \geq 1 - \varepsilon$$
Cette propriété est notée classiquement $X_n = O_P(1)$.

Autrement dit la loi des v.a. est essentiellement concentrée sur un compact.

Remarque 16

Dans ce contexte, la notation $X_n = o_P(1)$ désigne une suite $\{X_n\}_{n\geq 0}$ convergente en probabilité vers 0.

Proposition 17

Toute suite convergente en loi est bornée en probabilité.

Théorème 9 (Théorème de Polya (voir [BJ06, Pro 11.45])

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ et si F_X est continue en tout point de $\mathbb{R}$, alors la convergence des fonctions de répartition F_{X_n} de X_n est uniforme

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} |F_{X_n}(t) - F_X(t)| = 0 \tag{25}$$

Remarque 17

- Un cas de figure classique est celui où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. La fonction de répartition associée à cette dernière loi est continue.
- Ce résultat permet d'affirmer que pour toute suite de réels $\{t_n\}_{n\geq 0}$ alors $F_{X_n}(t_n) - F_X(t_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ce fait est régulièrement exploité dans la pratique des statistiques.

M. Brancovan et T. Jeulin *Probabilités, Niveau M1*. Ellipses, 2006.

Proposition 18 (Un critère de convergence en loi)

Considérons une suite de v.a. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ de lois $\mathbb{P}_{X_n}$ admettant une densité f_n par rapport à une mesure σ-finie μ. On suppose que, pour f densité de la loi d'une certaine v.a. notée X,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pour } \mu\text{-p tout } x.$$

Alors

1. *la suite des lois de $\{\mathbb{P}_{X_n}\}_{n\geq 0}$ converge pour la distance en variation totale :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} d_{\mathrm{TV}}(\mathbb{P}_{X_n}, \mathbb{P}_X) &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{A\in\mathscr{E}} |\mathbb{P}_{X_n}(A) - \mathbb{P}_X(A)| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sup_{A\in\mathscr{E}} \int_A |f_n(x) - f(x)| d\mu(x) = 0\end{aligned}$$

2. *La suite $\{X_n\}_{n\geq 0}$ converge en loi vers X*

Remarque 18

- Ce résultat est connu sous le nom de lemme de Scheffé
- Dans notre contexte de modèle statistique, les densités sont les fonctions de vraisemblance.
- Noter que le premier point permet d'en déduire la convergence uniforme des fonctions de répartition F_{X_n} vers F_X. C'était attendu d'après le Théorème de Polya.
- Pour le second point, la réciproque est fausse en générale.

Relation avec la convergence en probabilité

- Rappelons les relations directes avec les trois modes de convergence déjà évoqués :

$$\begin{array}{ccccc} \xrightarrow[n\to+\infty]{ps} & \Longrightarrow & \xrightarrow[n\to+\infty]{P} & \Longrightarrow & \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathrm{EQM}} & \nearrow & & & \end{array}$$

- La propriété de consistance d'une suite d'estimateurs amène au cas de figure classique où la convergence en probabilité et en loi sont équivalentes :

Proposition 19

Pour la suite $\{X_n\}_{n\geq 0}$, on a l' équivalence pour $a \in \mathbb{R}$

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} a \Longleftrightarrow X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} a$$

Proposition 20 (Opérations (voir [BJ06, Pro 11.26] ou Td de proba)

Soit une suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ de v.a. toutes définies sur le même espace probabilisé telle que, pour une certaine v.a. X,

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X.$$

1. *Si $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ est une autre suite de v.a. définies sur l'espace probabilisé associé à $\{X_n\}_{n\geq 1}$ et telle que $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{P} c$ (c constante finie) alors*

$$\begin{cases} X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X + c \\ X_n Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} cX \\ \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \frac{X}{c} \text{ pourvu que } c \neq 0 \end{cases}$$

2. *Si f est continue sur un ensemble de $\mathbb{P}_X$-probabilité nulle, alors*

$$f(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} f(X).$$

Remarque 19

- La première partie est essentiellement connue sous le nom de lemme de Slutsky
- Noter qu'aucune hypothèse d'indépendance n'est requise.

Théorème Central Limite

Théorème 10 (Version classique)

Soit $\{X_n\}_{n\geq 0}$ un n-échantillon de loi commune F d'espérance m et de variance σ^2 finie. Posons $S_n = \sum_i X_i$. Alors

$$Z_n := \frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} = \sqrt{n}\left[\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$
$$\iff \sqrt{n}[\overline{X}_n - m] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

où $\mathcal{N}(0,1)$ représente une v.a. de loi normale centrée-réduite. On notera $Z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Corollaire 3

Sous les conditions du précédent théorème,

(26) $$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| F_{Z_n}(t) - \underbrace{\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)\, dx}_{\Phi(t)} \right| = 0$$

$\Phi(\cdot)$ désignera la fonction de répartition d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Si le TCL est valide pour un n-échantillon, alors

1. à l'aide de la Pro 20, $\{\overline{X}_n\}_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers m :

$$\frac{S_n}{n} - m = \overline{X}_n - m = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sqrt{n}\left[\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma}\right]$$

2. d'après le Cor 3 (voir la Rem 17)

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\{\overline{X}_n \leq t\} - \mathbb{P}\{\mathcal{N}(m,\sigma^2/n) \leq t\} \right| = 0$$

Autrement dit, on sera amené très régulièrement dans la pratique à considérer que $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2/n)$ lorsque la taille de l'échantillon est grande.

Applications directes

Le TCL appliqué à partir des n-échantillons d'une loi :

1. $\mathrm{Ber}(p)$ et $S_n \sim \mathrm{Bin}(n,p)$
2. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ et $S_n \sim \mathrm{Ga}(n,\lambda)$ ou loi d'Erlang
3. χ^2_1 et $S_n \sim \chi^2_n$

et on a $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{V(S_n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Exemples en combinaison avec la Pro 20

À partir de résultats de type Slutsky, on peut étendre la porté du TCL :

1. si σ^2 est inconnu alors on peut la remplacer par n'importe quel estimateur consistant et la conclusion reste valide :

$$\sqrt{n}\left[\frac{\overline{X}_n - m}{S_n}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1) \qquad \sqrt{n}\left[\frac{\overline{X}_n - m}{\widetilde{S}_n}\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1);$$

2. si $t_n \sim st_n$ alors $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Exemple en combinaison avec la Pro 20 : variance empirique

1. Cas d'un n-échantillon gaussien $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$: $(n-1)\frac{\widetilde{S}^2_n}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ et on vient de voir que

$$\frac{\chi^2_{n-1} - (n-1)}{\sqrt{(n-1)}} = \sqrt{n-1}\left[\frac{\chi^2_{n-1}}{(n-1)} - 1\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,2)$$

d'où

$$\sqrt{n-1}\left[\frac{\widetilde{S}^2_n}{\sigma^2} - 1\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,2)$$

$$\text{ou } \sqrt{n-1}[\widetilde{S}^2_n - \sigma^2] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,2\sigma^4)$$

Par Slutsky

$$\sqrt{n}[\widetilde{S}^2_n - \sigma^2] = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}} \times \sqrt{n-1}[\widetilde{S}^2_n - \sigma^2] \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,2\sigma^4).$$

On obtiendrait le même résultat pour S^2_n à l'aide de Slutsky.