Université de Poitiers
Département de Mathématiques

2M12–Processus à temps discret
Master MMAS, Année 2008–09

# FEUILLE N° 1, TRAVAUX PRATIQUES

Les travaux pratiques seront effectués avec SCILAB, le code pourra être intégré au rapport final.

EXERCICE 1. — Nous considérons une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, $X_n = Z_0 + \cdots + Z_n$, symétrique ($p = 1/2$), $A = \{1\}$ et $T$ le temps d'atteinte de $A$.

(i) Approcher par simulation la fonction de répartition de $T$. Comparer la fonction obtenue avec l'affirmation selon laquelle $\mathbb{P}\{T \leqslant 2k\} = 1 - C_{2k+1}^{k+1} \times 2^{-2k}$. (On pourra prendre $0 \leqslant k \leqslant 10$ et pour chaque évaluation, $n = 1000$).

(ii) (pour le compte-rendu uniquement) Étudier l'exercice correspondant de la feuille de travaux dirigés pour justifier le résultat annoncé (qui a l'air faux).

EXERCICE 2 (LE COLLECTIONNEUR DE VIGNETTES). — Pierre achète des tablettes de chocolat d'une certaine marque. Dans chaque tablettes, il trouve une vignette qu'il peut coller dans un album édité par cette même marque. L'album contient $m$ emplacements. Soient $T_1 = 1$, puis $T_2$ le rang d'obtention d'une vignette différente de la première, puis $T_3$ celui d'obtention d'une vignette différente des deux première, etc. , jusqu'à $T_m$ le rang de complétion de l'album. On pose $U_1 = T_1 = 1$, $U_2 = T_2 - T_1, \ldots, U_m = T_m - T_{m-1}$.

(i) Simuler cette expérience aléatoir een prenant des valeurs raisonables pour $m$ (5, 10, 20).

(ii) Estimer l'espérance de $T_m$ qui est affirmée être égale à $m(1 + 1/2 + \cdots + 1/m)$ pour les valeurs de $m$ envisagées auparavant.

(iii) (pour le compte-rendu uniquement) Étudier l'exercice correspondant de la feuille de travaux dirigés pour justifier le résultat annoncé.

EXERCICE 3 (CONTRÔLE DES NAISSANCES). — Soit $X = (X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de bernoulli symétrique $\mathcal{B}(1, 1/2)$. Les valeurs obtenues correspondent à la naissance au $n$-ième essai d'un garçon ou d'une fille, et on suppose qu'il n'y a pas de naissance multiple. Les parents se fixent certains objectifs ce qui conduit à temps d'arrêt $N$ qui est le nombre d'enfants obtenus.

D'après l'identité de Wald, quels que soient les objectifs choisis par les parents, la moyenne de garçons (ou de filles) obtenus est $\mathbb{E}[N]/2$, et donc, ne dépend que de l'espérance du temps d'arrêt $N$.

(i) La famille décide d'arrêter de procréer dès qu'elle a obtenu deux garçons consécutivement. Évaluer le nombre moyen d'enfants et de garçons dans la famille, par simulation et par calcul.

(ii) La famille décide d'arrêter de procréer dès qu'elle a obtenu ungarçon succédant immédiatement à une fille. Évaluer le nombre moyen d'enfants et de garçons dans la famille, par simulation et par calcul.

EXERCICE 4. — Pierre possède $a$ euros, Paul en possède $b$. Ils jouent à pile ou face. Si la pi'ece tombe sur pile, Pierre prend un euro à Paul et réciproquement. Le jeu s'achève lorsque l'un des deux joueurs est ruiné.

(i) Déterminer les probabilités que l'un ou l'autre soit gagnant de manière théorique.

(ii) Vérifier le résultat obtenu à l'aide de simulations pour $a = b = 10$, $a \neq b$ de différentes valeurs raisonnables (3 choix).

(iii) Tracer des diagrammes représentant la loi du temps de ruine de l'un des joueurs pour les valeurs de $a$ et $b$ qui auront été considérées.

Les résultats de simulation pourront être recopiés dans un fichier LaTeX ainsi que les programmes dans un environnement de type

```
\begin{verbatim}
  ...
\end{verbatim}
```

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

2M12–Processus à temps discret
Master MMAS, Année 2008–09

# FEUILLE N° 2, TRAVAUX PRATIQUES

Les travaux pratiques seront effectués avec SCILAB, le code pourra être intégré au rapport final.

EXERCICE 1 (CHAÎNES DE MARKOV À 2 ÉTATS). — Nous considérons une chaîne de Markov homogène à 2 états. On rappelle que l'espace d'états est $E = \{1, 2\}$ et que la matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Pour la suite, on choisira $\alpha$ et $\beta$ assez simples, par exemple dans $\{1/4, 1/2, 3/4\}$, ce qu'on pourra paramétrer en début de programme par la définition de variables `alpha` et `beta` afin de faire ultérieurement des essais pour d'autres valeurs.

(i) En partant du premier état, par exemple, simuler une trajectoire de longueur $T$ raisonnable (1000, 10 000, 100 000 en fonction du temps de calcul et des capacités de mémoire de la machine). L'enregistrement des différentes valeurs prises au cours du temps se fera dans un vecteur (ligne ou colonne). Représenter graphiquement une partie raisonnable de la trajectoire sous forme de ligne brisée.

(ii) Déterminer sur cette trajectoire la fréquence d'occupation de chacun des états.

(iii) Changer d'état initial et recommencer les points (i) et (ii). Observe-t-on des différences significatives ?

(iv) Sur une trajectoire donnée, peut-on estimer $\alpha$ et $\beta$ ? S'il semble que oui (les justifications théoriques sont à venir, je l'espère…), mettre en pratique une telle estimation. Comparer rapidement les résultats obtenus avec les paramètres $\alpha$ et $\beta$ choisis.

(v) Modifier les paramètres et observer d'éventuelles différences de vitesses de convergence (fréquences, paramètres).

(vi) Pour un choix donné de $\alpha$ et $\beta$, calculer une dizaine de puissances successives de la matrice de transition $P$. Avec la condition $\alpha + \beta > 0$ semblent-elles converger ? Qu'en est-il si $\alpha + \beta = 0$ ?

(vii) On affirme que si $\alpha + \beta > 0$, alors

$$P^n \longrightarrow P^\infty = \begin{pmatrix} \beta/(\alpha+\beta) & \alpha/(\alpha+\beta) \\ \beta/(\alpha+\beta) & \alpha/(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Est-ce cohérent avec le calcul des puissances successives de $P$ pour les paramètres choisis ? Effectuer différents essais en faisant varier $\alpha$ et $\beta$ et en prenant pour sortie simplement la dernière puissance ($n$ pourra être choisi nettement plus grand que 10). (On pourra montrer ce résultat asymptotique dans le compte-rendu.)

(viii) Que peut-on dire des lignes de $P^\infty$ ? Retrouver ce résultat à la main. A-t-on unicité ?

Exercice 2. — Nous considérons la chaîne de Markov de schéma de stransition suivant :

(i) Coder la matrice de transition correspondante. On pourra conserver comme paramètre son nombre de lignes ou de colonnes.

(ii) Retrouver les classes communiquantes et leur nature. Serait-il possible de lire directement sur la matrice cette classification (quitte à réindexer les différents états) ?

(iii) Pour chaque état initial, effectuer une simulation de trajectoire et la représenter. Est-ce cohérent avec la classification obtenue ?

*Remarque.* — Pour la simulation des trajectoires, il peut être judicieux de créer une seconde matrice dont les coefficients sont les sommes des termes précédents de la même ligne. Ainsi, après tirage d'un nombre aléatoire, il suffit de lire le long de la ligne correspondante pour savoir quel nouvel état sera choisi.

Exercice 3 (l'urne d'Ehrenfest). — Nous considérons deux urnes A et B et $N$ boules numérotées de 1 à $N$ réparties dans les deux urnes. On tire uniformément un nombre entre 1 et $N$. La boule portant ce numéro est alors déplacée dans l'autre urne (si elle est dans A, elle va dans B, si elle est dans B, elle va dans A). Et on continue...

Soit $X_n$ le nombre de boules dans l'urne A à l'étape $n$, qui est une variable aléatoire à valeurs dans $E = \{0, 1, \ldots, N\}$. En admettant que $(X_n)_{n \geqslant 0}$ est bien une chaîne de Markov homogène, sa matrice de transition s'écrit alors

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & \frac{N-2}{N} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{N-2}{N} & 0 & \frac{2}{N} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \frac{N-1}{N} & 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Que peut-on dire des classes communiquantes ?

(ii) On prendra pour paramètre $N$. Avec pour valeur initiale $X_0 = N$ (par exemple), simuler la chaîne de Markov pour en représenter quelques trajectoires avec $N \in \{1, 2, 10\}$ dans un premier temps, ensuite $N$ grand (100 ou plus). Qu'observe-t-on ?

Les résultats de simulation pourront être recopiés dans un fichier LaTeX ainsi que les programmes dans un environnement de type

```
\begin{verbatim}
  ...
\end{verbatim}
```