

EXAMEN DE PROBABILITÉS, 17 DÉCEMBRE 2008

Durée : 3 heures (9h–12h [9h–13h si tiers temps])

Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice est interdit. Les différents exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation des copies.

EXERCICE 1 (QUESTIONS DE COURS). — On répondra aux questions suivantes sans donner de démonstration.

- (i) Énoncer l'inégalité de Cauchy–Schwarz dans le cadre des variables aléatoires réelles. En déduire une condition *suffisante* pour que le produit de deux variables aléatoires réelles $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ soit intégrable.
- (ii) Soient $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles indépendantes et intégrables. Leur produit est-il intégrable, et si oui, que vaut son espérance ?
- (iii) Soit $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire réelle positive. Pour $a > 0$, énoncer l'inégalité de Markov donnant une majoration de $\mathbb{P}\{Y > a\}$ (ou de $\mathbb{P}\{Y \geq a\}$).
- (iv) Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle intégrable d'espérance $\mu = \mathbb{E}[X]$. Pour $\varepsilon > 0$, énoncer l'inégalité de Tchebychev donnant une majoration de $\mathbb{P}\{|X - \mu| > \varepsilon\}$ (ou de $\mathbb{P}\{|X - \mu| \geq \varepsilon\}$).

EXERCICE 2. — Un joueur tourne une roue. À chaque essai, il a une probabilité $1 - p$ de tomber sur une case lui rapportant 1 € et p de tomber sur la case « banqueroute » qui lui fera tout perdre et l'éliminera du jeu. Il débute avec une somme initiale égale à 0 € et souhaite atteindre un gain G_0 , après quoi, il quittera le jeu — s'il n'y a pas déjà été contraint auparavant. Les résultats successifs sont supposés indépendants. Ceci sera formalisé par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'événements indépendants tous de probabilité p . Le gain final est noté G .

- (i) Sur un petit graphique, représenter rapidement les deux situations typiques pouvant se produire.
- (ii) Quelle est la probabilité d'obtenir le gain G_0 ?
- (iii) En déduire l'espérance du gain final $\mathbb{E}[G]$.

EXERCICE 3. — Dans une assemblée de n personnes, on constitue par tirage au sort un comité de s personnes. Ce comité désigne son président également par tirage au sort. Sachant que M Dupont, membre de l'assemblée, n'est pas le président du comité, quelle est la probabilité que ce monsieur appartienne au comité ?

- (i) Décrire précisément le modèle probabiliste sous-jacent.
- (ii) Préciser les événements A et B considérés dans ce problème.
- (iii) Calculer la probabilité *conditionnelle* $\mathbb{P}(A | B)$ cherchée.

EXERCICE 4. — Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- (i) Soit $p \in [0, 1]$. Nous considérons $X_1^p, \dots, X_n^p : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \{0, 1\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, la loi de Bernoulli de paramètre p . Nommer — sans démonstration — la loi de $S_n^p = X_1^p + \dots + X_n^p$. En déduire l'espérance et la variance de $\bar{X}_n^p = S_n^p/n$ en se basant sur l'espérance et la variance de S_n^p , normalement connues.

(ii) Avec les mêmes hypothèses qu'à la question précédente, déterminer l'espérance de la variable aléatoire $f(\bar{X}_n^p)$, qui est un polynôme $P_{f,n}$ en la variable p .

(iii) Rappeler ce qu'affirme le théorème de Heine quant aux fonctions continues sur un compact. Écrire cette propriété en termes de ε et η .

(iv) Le nombre $p \in [0, 1]$ étant fixé, $f(p)$ peut être considéré comme une variable aléatoire constante. Majorer

$$|P_{f,n}(p) - f(p)| = |\mathbb{E}[f(\bar{X}_n^p)] - f(p)|$$

en se servant d'une part de la propriété de Heine et d'autre part de l'inégalité de Tchebychev, l'inégalité obtenue pouvant dépendre de p , n , $\|f\|_\infty$, ε et η .

(v) En étudiant la fonction $p \in [0, 1] \rightarrow p(1 - p)$, En déduire une majoration ne dépendant plus de p .

(vi) En déduire que f est limite uniforme de polynômes sur $[0, 1]$ (théorème de Weierstrass).

EXAMEN DE PROBABILITÉS, 17 DÉCEMBRE 2008,
CORRIGÉ

EXERCICE 1 (*question de cours*). — (i) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles de carré intégrable, alors

$$|\mathbb{E}[X \times Y]| \leq \mathbb{E}[|X \times Y|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]} \times \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

(Ce qui suit n'était pas demandé : il y a égalité si et seulement si les variables aléatoires X et Y sont liées, c'est-à-dire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\alpha X + \beta Y = 0$ presque sûrement.)

On en déduit que pour que $X \times Y$ soit intégrable, *il suffit* que X et Y soient de carré intégrable. (Ça n'est certainement pas la seule condition suffisante, voir les inégalités de Hölder [non traitées en cours] par exemple, ainsi que la question suivante...)

(ii) Si $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont intégrables et indépendantes, alors $X \times Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ est intégrable et on a $\mathbb{E}[X \times Y] = \mathbb{E}[X] \times \mathbb{E}[Y]$.

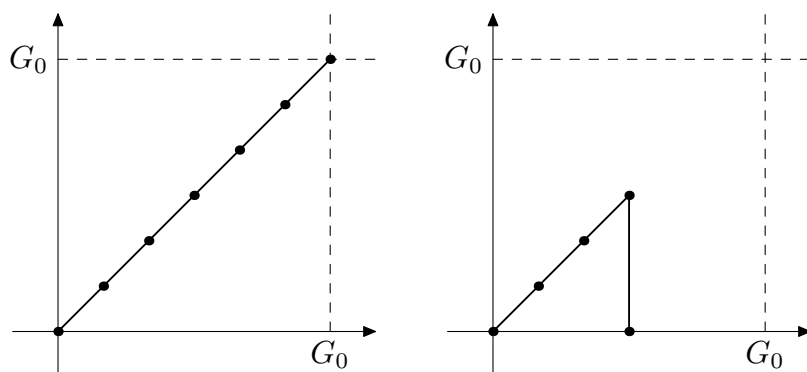
(iii) Soit $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire réelle positive. Alors pour tout $a > 0$, on a

$$\mathbb{P}\{Y > a\} \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a} \quad (\in \bar{\mathbb{R}}_+) \quad \text{ainsi que} \quad \mathbb{P}\{Y \geq a\} \leq \frac{\mathbb{E}[Y]}{a} \quad (\in \bar{\mathbb{R}}_+).$$

(iv) Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle, intégrable d'espérance $\mu = \mathbb{E}[X]$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}\{|X - \mu| > \varepsilon\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2} \quad (\in \bar{\mathbb{R}}_+) \quad \text{ainsi que} \quad \mathbb{P}\{|X - \mu| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2} \quad (\in \bar{\mathbb{R}}_+).$$

EXERCICE 2. — (i) Les deux situations typiques pouvant se passer sont l'atteinte du gain avant la banqueroute et la banqueroute avant l'atteinte du gain. Ceci peut se visualiser ainsi :



(ii) La variable aléatoire G ne peut prendre que deux valeurs : $\{0, G_0\}$. Pour que le gain soit égal à G_0 , il faut gagner les G_0 premiers essais. Ainsi,

$$\mathbb{P}\{G = G_0\} = \mathbb{P}(A_1^c \cap \dots \cap A_{G_0}^c) = \mathbb{P}(A_1^c) \times \dots \times \mathbb{P}(A_{G_0}^c) = (1 - p)^{G_0},$$

d'une part parce que les événements apparaissant dans l'intersection sont indépendants par hypothèse et d'autre part parce que la probabilité de chacun d'eux est $\mathbb{P}(A_i^c) = 1 - \mathbb{P}(A_i) = 1 - p$.

(iii) L'espérance de G est bien définie puisque c'est une variable aléatoire bornée, et on a

$$\mathbb{E}[G] = 0 \times \mathbb{P}\{G = 0\} + G_0 \times \mathbb{P}\{G = G_0\} = G_0 \times (1 - p)^{G_0}.$$

Remarque. — On constate que si $p > 0$, cette espérance tend vers 0 quand le gain souhaité G_0 tend vers l'infini, ce qui est bien normal. Évidemment, si $p = 0$, on gagne à tous les coups (presque sûrement)...

EXERCICE 3. — Pour cet exercice, deux modèles sont envisageables : le premier se base sur le dénombrement de toutes les possibilités et conduit donc à un modèle probabiliste classique, le second ne tient compte que de ce qu'il peut arriver à M Dupont.

Première version. — (i) Supposons les différentes personnes numérotées de 1 à n , M Dupont correspondant à un certain numéro que nous ne précisons pas. Donc, on choisit s personnes parmi n , puis 1 personne parmi s . Nous pouvons poser $\Omega = \mathcal{P}_s(\{1, \dots, n\}) \times \mathcal{P}_1(\{1, \dots, s\})$. C'est un ensemble fini de cardinal $\text{Card } \Omega = C_n^s \times C_s^1 = C_n^s \times s$. On le munit de sa tribu discrète et de la mesure de probabilité uniforme en pensant que toutes les configurations possibles sont équiprobables.

(ii) Les événements considérés sont :

$A =$ « M Dupont appartient au comité » et $B =$ « M Dupont n'est pas président ».

(iii) Nous avons à calculer

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card } B},$$

le calcul se ramenant à celui de cardinaux puisque nous sommes dans un modèle probabiliste classique. On a

$$\text{Card}(A \cap B) = C_{n-1}^{s-1} \times (s-1)$$

puisqu'ayant déjà choisi Dupont, il reste $s-1$ personnes parmi $n-1$ à choisir pour définir le comité, et puisque Dupont n'est pas président, ce dernier est choisi parmi les $s-1$ personnes restantes. On a

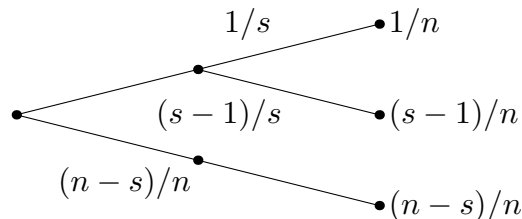
$$\text{Card}(B) = C_{n-1}^{s-1} \times (s-1) + C_{n-1}^s \times s$$

puisque B est la réunion disjointe de $A \cap B$ et de l'événement « Dupont n'est pas dans le comité » qui est de cardinal $C_{n-1}^s \times s$. Nous pouvons ainsi conclure :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{C_{n-1}^{s-1} \times (s-1)}{C_{n-1}^{s-1} \times (s-1) + C_{n-1}^s \times s} = \dots = \frac{s-1}{n-1},$$

en laissant au lecteur le détail de la réduction de la fraction.

Deuxième version. — (i) Nous pouvons voir le mécanisme de sélection selon un arbre :



Le premier embranchement correspond à la présence de Dupont dans le comité ou non, le second sur la première branche correspondant à sa présidence ou non. Nous avons donc un modèle à trois « points » $\Omega = \{C \cap P, C \cap P^c, C^c\}$ où les notations parlent d'elles-mêmes (nous conservons tout de même des notations ensemblistes). Nous le munissons de sa tribu discrète, en revanche la mesure de probabilité sur ces trois points est plus délicate puisqu'il ne s'agit

pas d'une mesure de probabilité uniforme : $\mathbb{P}(C \cap P) = \mathbb{P}(P | C) \times \mathbb{P}(C) = (1/s) \times (s/n) = 1/n$,
 $\mathbb{P}(C \cap P^c) = \mathbb{P}(P^c | C) \times \mathbb{P}(C) = ((s-1)/n) \times (s/n) = (s-1)/n$, et $\mathbb{P}(C^c) = (n-s)/n$.

(ii) Réponse inchangée. En précisant qu'ici $A = (C \cap P) \cup (C \cap P^c)$ et $B = (C \cap P^c) \cup C^c$.

(iii) On a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(C \cap P^c) = (s-1)/n$ et $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C \cap P^c) + \mathbb{P}(C^c) = (n-1)/n$,
d'où $\mathbb{P}(A | B) = (s-1)/(n-1)$.

EXERCICE 4. — Soit $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $p \in [0, 1]$, soient $(X_n^p)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{B}(1, p)$.

(i) La variable aléatoire $S_n^p = X_1^p + \dots + X_n^p$ est de loi $\mathcal{B}(n, p)$ et donc d'espérance np et de variance $np(1-p)$. Par conséquent, $\bar{X}_n^p = S_n^p/n$ a pour espérance

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n^p] = \mathbb{E}[S_n^p/n] = \mathbb{E}[S_n^p]/n = p$$

et pour variance

$$\text{Var}[\bar{X}_n^p] = \text{Var}[S_n^p/n] = \text{Var}[S_n^p]/n^2 = p(1-p)/n.$$

(ii) La variable aléatoire $f(\bar{X}_n^p)$ est intégrable car bornée et on a

$$\mathbb{E}[f(\bar{X}_n^p)] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n^p}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbb{P}\{S_n^p = k\} = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

ce qui définit un polynôme de degré n en la variable p , polynôme que nous notons $P_{f,n}$.

(iii) Rappelons qu'une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in I$, si $|x - y| < \eta$ alors $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Le théorème de Heine affirme que toute fonction continue sur un intervalle compact (fermé borné) est uniformément continue. Ainsi, la fonction f que nous considérons est uniformément continue.

(iv) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que pour tous $x, y \in [0, 1]$, si $|x - y| < \eta$ alors $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ (ε -module de continuité de f). Soit $p \in [0, 1]$, estimons $|P_{f,n}(p) - f(p)|$:

$$\begin{aligned} |P_{f,n}(p) - f(p)| &= |\mathbb{E}[f(\bar{X}_n^p)] - f(p)| \\ &= |\mathbb{E}[f(\bar{X}_n^p) - f(p)]| \\ &\leq \mathbb{E}[|f(\bar{X}_n^p) - f(p)|] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|\bar{X}_n^p - p| < \eta\}} |f(\bar{X}_n^p) - f(p)|\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|\bar{X}_n^p - p| \geq \eta\}} |f(\bar{X}_n^p) - f(p)|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|\bar{X}_n^p - p| < \eta\}} \varepsilon\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{|\bar{X}_n^p - p| \geq \eta\}} 2\|f\|_\infty\right] \\ &= \varepsilon \mathbb{P}\{|\bar{X}_n^p - p| < \eta\} + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\{|\bar{X}_n^p - p| \geq \eta\} \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\{|\bar{X}_n^p - p| \geq \eta\} \\ &= \varepsilon + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\{(\bar{X}_n^p - p)^2 \geq \eta^2\} \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E}\left[(\bar{X}_n^p - p)^2\right], \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant une application de l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev. On a ainsi

$$\begin{aligned}
 |P_{f,n}(p) - f(p)| &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{\eta^2} \mathbb{E}\left[(\bar{X}_n^p - p)^2\right] \\
 &= \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{\eta^2 n^2} \mathbb{E}\left[(S_n^p - np)^2\right] \\
 &= \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{\eta^2 n^2} \text{Var}(S_n^p) \\
 &= \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{\eta^2 n^2} np(1-p) \\
 &= \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{\eta^2 n} p(1-p).
 \end{aligned}$$

(v) L'étude élémentaire de $p \in [0, 1] \mapsto p(1-p)$ montre que cette fonction polynomiale est positive sur $[0, 1]$ de maximum $1/4$ (atteint en $1/2$). La majoration précédente conduit à une majoration uniforme en p :

$$|P_{f,n}(p) - f(p)| \leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{1}{4\eta^2 n} = \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 n}.$$

(vi) Ainsi,

$$\text{pour tout } n > \frac{\|f\|_\infty}{2\eta^2 \varepsilon}, \quad \text{on a} \quad |P_{f,n}(p) - f(p)| < 2\varepsilon \quad \text{quelque soit } p \in [0, 1].$$

Ceci montre que la suite $(P_{f,n})_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction continue f lorsque n tend vers l'infini. Donc f est bien limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[0, 1]$.

EXAMEN DE PROBABILITÉS, 4 JUIN 2009

Durée : 3 heures (9h–12h [9h–13h si tiers temps])

Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice est interdit. Les différents exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation des copies.

EXERCICE 1 (QUESTIONS DE COURS). — (i) Définir la notion d'espace probabilisé classique.

(ii) On considère une urne finie de cardinal N . Pour $0 \leq n \leq N$ donné, définir le modèle probabiliste correspondant à un tirage sans remise de n boules.

(iii) On considère une urne finie de cardinal N . Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, définir le modèle probabiliste correspondant à un tirage avec remise de n boules.

(iv) On considère une urne finie de cardinal N . Elle contient une proportion p de boules blanches et $1 - p$ de boules noires. On tire sans remise $0 \leq n \leq N$ boules. Décrire précisément la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules blanches tirées.

(v) L'urne est quelconque et contient une proportion p de boules blanches et $1 - p$ de boules noires. On tire avec remise $n \in \mathbb{N}^*$ boules. Décrire précisément la loi de la variable aléatoire Y qui compte le nombre de boules blanches tirées.

EXERCICE 2. — Dans un certain pays, un jeu télévisé curieux a été inventé : au candidat, on présente trois portes ; derrière ces trois portes ont été réparties de manière aléatoire deux chèvres et un cabriolet de sport (évidemment, il n'y a qu'un seul « item » par porte). Le candidat commence par choisir une porte — il espère découvrir la voiture. Le présentateur ouvre une des deux portes qu'il n'a pas choisies et montre une chèvre. Le problème qui se pose au candidat est alors (il ne reste que deux portes, celle qu'il a préalablement choisie, et l'autre, la troisième ayant été ouverte) de savoir s'il est préférable de conserver son choix de départ, ou de choisir la seconde porte.

(i) Définir un modèle probabiliste où le candidat conserve son choix de départ. Déterminer la probabilité qu'il découvre ainsi le cabriolet (et le gagne...).

(ii) Définir un modèle probabiliste où le candidat change son choix de départ (il opte pour l'autre porte fermée). Déterminer la probabilité qu'il découvre ainsi le cabriolet.

(iii) Moralité? (Hors barème.)

EXERCICE 3. — (i) On tire au hasard 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Après avoir décrit le modèle probabiliste envisagé, calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 2 reines.

(ii) Même question pour un tirage avec remise.

EXERCICE 4. — Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n)$ est le nombre des entiers premiers avec n et strictement inférieurs à n . On souhaite démontrer — par un raisonnement probabiliste — que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n, p \text{ premier}} \left(\frac{p-1}{p} \right),$$

le produit étant étendu à tous les facteurs premiers p de n .

(i) *Question préliminaire.* — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probablisé. Démontrer par récurrence que si A_1, \dots, A_n sont des événements indépendants, leurs complémentaires A_1^c, \dots, A_n^c le sont aussi.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ dont la décomposition en facteurs premiers est écrite $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$. Posons $\Omega = \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et \mathbb{P} la mesure de probabilité uniforme sur (Ω, \mathcal{A}) .

(ii) Vérifier que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probablisé. On précisera notamment comment est définie l'application \mathbb{P} .

(iii) Pour $k = 1, \dots, r$, posons $A_k = \{\omega \in \Omega : p_k \text{ divise } \omega\}$. Expliciter l'événement A_k et déterminer sa probabilité.

(iv) Soit $\{k_1, \dots, k_\ell\} \subset \{1, \dots, r\}$. Expliciter l'événement $A_{k_1} \cap \dots \cap A_{k_\ell}$ et déterminer sa probabilité. .../...

(v) Montrer que les événements A_1, \dots, A_r sont indépendants.

(vi) En déduire la probabilité de l'événement $A_1^c \cap \dots \cap A_r^c$.

(vii) Établir l'identité annoncée satisfaite par $\varphi(n)$.