

## PROCESSUS À TEMPS DISCRET. — EXAMEN

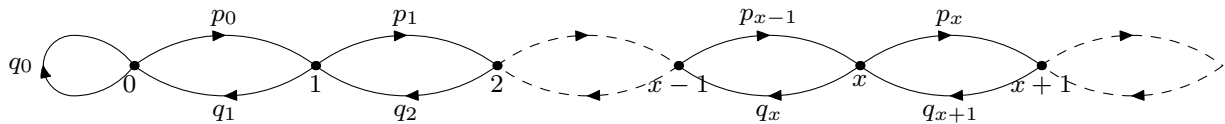
12 mai 2010, 8h30–12h30, IFMI 07

*Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice est autorisé. Les différents exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation des copies.*

EXERCICE 1. — Soient  $(p_x)_{x \in \mathbb{N}}$  une suite à valeurs dans  $[0, 1]$  et  $q_x = 1 - p_x$  pour tout  $x \geq 0$ . Nous considérons la matrice, ou noyau, de transition  $P$  sur  $E = \mathbb{N}$  définie par  $P(0, 0) = q_0$ ,  $P(0, 1) = p_0$ , et

$$P(x, x - 1) = q_x, \quad P(x, x + 1) = p_x, \quad \text{pour tout } x \geq 1,$$

tous les autres coefficients étant nuls.



Notons la chaîne de Markov associée  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, (\mathbb{P}^x)_{x \in E})$ . Le temps d'atteinte de 0 est  $H^0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$  et soit  $h^0(x) = \mathbb{P}^x\{H^0 < \infty\}$  la probabilité que la chaîne issue de  $x \in \mathbb{N}$  atteigne 0 en temps fini.

(i) En utilisant la propriété de Markov simple, établir que le vecteur  $h^0 = (h^0(x))_{x \in \mathbb{N}}$  vérifie le système d'équations linéaires :

$$h(0) = 1 \quad \text{et} \quad h(x) = q_x h(x - 1) + p_x h(x + 1) \quad \text{pour tout } x \geq 1. \quad (*)$$

(ii) Supposons qu'il existe au moins un rang  $x \geq 1$  tel que  $q_x = 0$ . Soit  $x_0 \geq 1$  le plus petit de ces rangs. Que vaut  $h^0(x)$  pour  $x \geq x_0$  ?

(iii) Supposons qu'il existe au moins un rang  $x \geq 1$  tel que  $p_x = 0$ . Soit  $x_0 \geq 1$  le plus petit de ces rangs. Nous supposons de plus que  $q_x > 0$  pour tout  $1 \leq x \leq x_0$ . Que vaut  $h^0(x)$  pour  $0 \leq x \leq x_0$  ?

Pour toute la suite, nous supposons  $p_x > 0$  pour tout  $x \geq 1$ .

(iv) Pour  $x \geq 1$ , posons  $u(x) = h^0(x - 1) - h^0(x)$ . Déterminer  $u(x)$ ,  $x \geq 2$ , en fonction de  $u(1)$  et des paramètres de la chaîne.

(v) En utilisant le principe des dominos, pour  $x \geq 1$ , exprimer  $h^0(x)$  en fonction de  $h^0(0)$  et  $u(1)$ , et finalement en fonction de  $u(1)$  seulement.

(vi) Notons  $S$  la somme de la série à termes positifs

$$1 + \sum_{y \geq 1} \frac{q_1}{p_1} \times \cdots \times \frac{q_y}{p_y}.$$

En se rappelant que  $h^0$  est la solution positive minimale du système (\*), quelle est cette solution si  $S = \infty$  ?

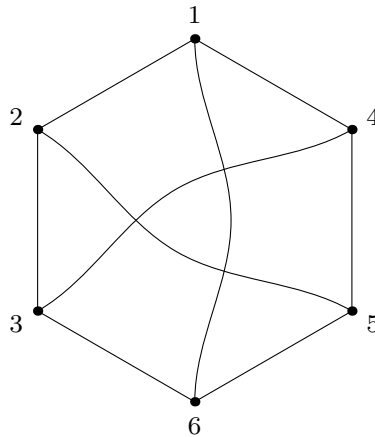
(vii) Supposons maintenant  $S < \infty$ . Déterminer en fonction de  $S$  la fonction  $h^0$ .

(viii) Nous appliquons ces résultats au problème de la ruine du joueur pour lequel  $p_x = 1 - q_x = p \in ]0, 1[$ . Expliciter complètement la fonction  $h^0$  suivant que  $p < 1/2$ ,  $p = 1/2$  et  $p > 1/2$ .

(ix) Nous supposons maintenant que le point 0 exerce une attraction de plus en plus faible à mesure qu'on s'en éloigne, de sorte qu'à l'infini on a  $p_x \approx q_x \approx 1/2$ . Nous écrivons  $p_x = 1/2 - r_x$  avec  $(r_x)_{x \geq 1}$  suite positive tendant vers 0 quand  $x \rightarrow \infty$ . Par comparaison avec la ruine du joueur dans le cas équitable  $p = 1/2$ , quelle devrait être la solution  $h^0$ ? Par des minoration simples, obtenir la valeur de  $S$  et celles de la fonction  $h^0$ .

(x) Changeons de signe pour considérer, ce qui est plus naturel, que la ruine est répulsive. Nous écrivons donc  $p_x = 1/2 + r_x$  avec toujours  $(r_x)_{x \geq 1}$  suite positive tendant vers 0 quand  $x \rightarrow \infty$ . Que dire de  $h^0$  si la série  $\sum_{x \geq 0} r_x$  est convergente? (Le cas de sa divergence ne sera pas abordé.)

EXERCICE 2. — Nous considérons le graphe suivant



c'est-à-dire que tout sommet de l'hexagone est relié à ses deux points voisins et au sommet opposé. La chaîne de Markov  $X$  considérée (ou plus précisément  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, (\mathbb{P}^x)_{x=1}^6)$ ) est définie par le fait que de tout sommet on a probabilité  $1/3$  de transiter vers chacun des 3 sommets adjacents.

(i) Écrire la matrice de transition  $P$  associée à cette description.

(ii) Expliquer pourquoi la matrice de transition  $P$  est irréductible. Justifier l'existence et l'unicité de sa mesure de probabilité invariante, déterminer cette mesure.

(iii) La chaîne est-elle apériodique? On pourra utiliser la numérotation des sommets pour justifier sa réponse.

(iv) Soit  $H^6 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 6\}$  le temps d'atteinte de 6. Déterminer  $k(x) = \mathbb{E}^x[H^6]$  le temps moyen d'atteinte de 6 partant de  $x \in E = \{1, \dots, 6\}$ . Pour cela, on montrera que pour tout  $x \neq 6$ ,

$$k(x) = 1 + \sum_{y \in E} P(x, y)k(y),$$

puis on résoudra le système linéaire obtenu.

(v) On s'intéresse maintenant à  $\ell(x) = \mathbb{P}^x\{H^5 \leq H^6\}$  la probabilité d'atteinte de 5 avant d'atteindre 6 en étant parti de  $x \in E$ . Établir avec justifications le système linéaire satisfait par  $\ell(x)$ ,  $x \in E$ . Le résoudre.

(vi) Sans calculer le polynôme caractéristique de  $P$ , déterminer, justifications à l'appui, les valeurs propres de  $P$  ainsi que leur ordre.

(vii) En déduire l'expression des puissances de  $P$ .

(viii) Conclure sur la question de la convergence vers l'équilibre en lien avec la réponse sur l'apériodicité de  $P$ .

EXERCICE 3. — Nous considérons l'urne de Polya : une urne contient initialement  $a$  boules rouges et  $b$  boules blanches ; on tire au hasard une boule ; on la remet dans l'urne avec en plus  $c$  boules de la même couleur (l'urne contient alors  $a + b + c$  boules en tout) où  $c$  est un entier strictement positif fixé ; puis, on continue. . .

Nous allons décrire l'évolution du contenu de l'urne à l'aide d'une chaîne de Markov  $Z = (X, Y)$  d'espace d'états  $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$  et de noyau de transition  $P : E \times E \rightarrow [0, 1]$ , où  $X_n$ , respectivement  $Y_n$ , est le nombre de boules rouges, respectivement blanches, à l'instant  $n \geq 0$ .

(i) Expliciter le noyau  $P$ , *i.e.* préciser ce que vaut  $P(z, z')$  pour tout  $z = (x, y)$ ,  $z' = (x', y') \in E$ . En déduire l'expression de  $Pf : E \rightarrow \mathbb{R}$  en fonction de  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une application bornée, ou de signe constant.

(ii) Nous supposons l'urne initialement non vide. Soit  $M_n = X_n / (X_n + Y_n)$  la proportion de boules rouges à l'instant  $n \geq 0$ . Montrer que  $M = (M_n)_{n \geq 0}$  est une martingale de l'espace probabilisé filtré  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}^\bullet, \mathcal{F})$  où  $\mathcal{F}$  est la filtration naturelle de la chaîne et  $\mathbb{P}^\bullet$  est la mesure de probabilité correspondant à la condition initiale envisagée.

(iii) Pour une condition initiale  $(a, b) \in E$  donnée, que peut-on dire de simple sur le comportement asymptotique de la chaîne de Markov  $Z$  ? Qu'en est-il de la martingale  $M$  ?

(iv) Définir en pseudo-langage (voisin de SCILAB) une commande `polyastep` d'arguments  $(a, b, c)$  retournant l'état de l'urne  $(x, y)$  après tirage aléatoire. L'utiliser dans un pseudo-script destiné à observer la convergence le long d'une trajectoire. L'utiliser dans un autre pseudo-script destiné à voir l'allure de la loi de la variable limite. Ces pseudo-programmes doivent virtuellement fonctionner, il faudra notamment donner des paramètres de simulation.



## PROCESSUS À TEMPS DISCRET. — CORRECTION DE L'EXAMEN

12 mai 2010, 8h30–12h30, IFMI 07

EXERCICE 1. — (i) Sous  $\mathbb{P}^0$ , nous avons  $H^0 = 0$  presque sûrement. Donc  $h^0(0) = \mathbb{P}^0\{H^0 < \infty\} = 1$ . Soit  $x \geq 1$ . Sous  $\mathbb{P}^x$ , il faut au moins 1 pas pour rejoindre 0 et donc  $H^0 \geq 1$  presque sûrement. En appliquant la propriété de Markov simple au temps 1,

$$\begin{aligned} h^0(x) &= \mathbb{P}^x\{H^0 < \infty\} = \mathbb{P}^x\{1 \leq H^0 < \infty\} = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{1 \leq H^0 < \infty, X_1 = y\} \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \times \mathbb{P}^y\{1 \leq H^0 < \infty \mid X_1 = y\} \quad (\text{formule des probabilités totales}) \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \times \mathbb{P}^y\{0 \leq H^0 < \infty\} \quad (\text{propriété de Markov simple de la chaîne}) \\ &= \sum_{y \in E} P(x, y) \times \mathbb{P}^y\{H^0 < \infty\} \quad (\text{transitions décrites par le noyau } P) \\ &= \sum_{y \in E} P(x, y) \times h^0(y), \end{aligned}$$

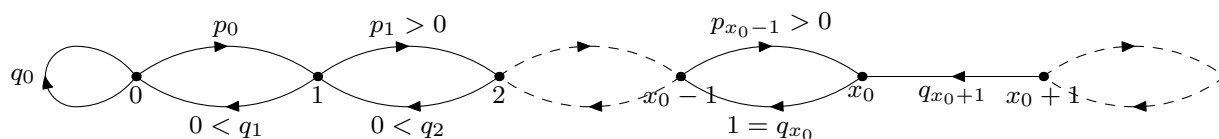
ce qui se résume ici à

$$h^0(x) = P(x, x-1)h^0(x-1) + P(x, x+1)h^0(x+1) = q_x h^0(x-1) + p_x h^0(x+1).$$

La fonction  $h^0$  vérifie donc le système (\*).

(ii) La chaîne issue de  $x \geq x_0$  ne peut plus retourner en 0. On a donc  $h^0(x) = 0$  pour tout  $x \geq x_0$ .

(iii) La chaîne issue de  $x \leq x_0$  ne peut pas dépasser  $x_0$ , elle reste dans le sous-ensemble  $\{0, \dots, x_0\}$ . Le graphique suivant illustre cette affirmation et rappelle les hypothèses :



On peut lire sur ce graphique que tous les états de  $\{1, \dots, x_0\}$  communiquent, ils sont donc dans la même classe communicante. De plus ils mènent tous à 0. Si 0 mène à 1, alors la restriction de  $P$  à  $\{0, \dots, x_0\}$  est irréductible, en particulier elle est récurrente et le temps d'atteinte de 0 depuis toute valeur initiale est presque sûrement fini. Si 0 ne mène pas à 1, alors 0 est absorbant,  $\{1, \dots, x_0\}$  est transiente, et le temps d'atteinte de 0 depuis toute valeur initiale est presque sûrement fini. Finalement, dans les deux cas,  $h^0(x) = 1$  pour tout  $0 \leq x \leq x_0$ .

(iv) D'après le système (\*), nous avons pour tout  $x \geq 1$ ,  $h^0(x) = q_x h^0(x-1) + p_x h^0(x+1)$ , et comme  $q_x + p_x = 1$ ,  $p_x h^0(x) + q_x h^0(x) = q_x h^0(x-1) + p_x h^0(x+1) \iff p_x (h^0(x) - h^0(x+1)) = q_x (h^0(x-1) - h^0(x)) \iff p_x u(x+1) = q_x u(x) \iff u(x+1) = q_x/p_x \times u(x)$ . De proche en proche, on obtient  $u(x+1) = q_x/p_x \times \dots \times q_1/p_1 \times u(1)$ , soit

$$u(x) = \frac{q_{x-1}}{p_{x-1}} \times \dots \times \frac{q_1}{p_1} \times u(1) \quad \text{pour tout } x \geq 2.$$

(v) Pour  $x \geq 2$ , on a  $1 - h^0(x) = h^0(0) - h^0(x) = u(1) + \dots + u(x) = u(1)(1 + q_1/p_1 + \dots + q_1/p_1 \times \dots \times q_{x-1}/p_{x-1})$ , soit

$$h^0(x) = 1 - u(1) \left( 1 + \sum_{y=1}^{x-1} \frac{q_1}{p_1} \times \dots \times \frac{q_y}{p_y} \right)$$

formule valide pour  $x \geq 2$ , mais aussi pour  $x = 1$  en convenant qu'une somme vide est nulle (on a toujours  $h^0(0) = 1$ ).

(vi) Pour  $v > 0$ , la fonction  $h_v$  définie par

$$h_v(x) = 1 - v \times \left( 1 + \sum_{y=1}^{x-1} \frac{q_1}{p_1} \times \dots \times \frac{q_y}{p_y} \right)$$

tend vers  $-\infty$  quand  $x \rightarrow \infty$ , elle n'est donc pas positive. On doit donc avoir  $u(1) \leq 0$ , et la solution minimale est alors obtenue pour  $v = 0$ . Donc  $u(1) = 0$  et  $h^0(x) = 1$  pour tout  $x \geq 0$ .

(vii) Une solution est positive si et seulement  $v \leq 1/S$ . On constate immédiatement que la solution minimale sous cette condition est obtenue pour  $v = 1/S$ , donc

$$h^0(x) = 1 - \frac{1}{S} \times \left( 1 + \sum_{y=1}^{x-1} \frac{q_1}{p_1} \times \dots \times \frac{q_y}{p_y} \right).$$

(viii) Pour la ruine du joueur, on a

$$S = 1 + \sum_{y \geq 1} (q/p)^y = \sum_{y \geq 0} (q/p)^y$$

qui est convergente si et seulement si  $q < p$ , c'est-à-dire si  $p > 1/2$ . Ainsi, pour  $p \leq 1/2$ , on a  $h^0(x) = 1$  pour tout  $x \geq 0$  : la ruine est sûre. Lorsque  $p > 1/2$ , on a  $S = 1/(1 - q/p)$  et

$$\begin{aligned} h^0(x) &= 1 - (1 - q/p) \times \left( 1 + \sum_{y=1}^{x-1} (q/p)^y \right) = 1 - (1 - q/p) \times \sum_{y=0}^{x-1} (q/p)^y \\ &= 1 - (1 - q/p) \times \frac{1 - (q/p)^x}{1 - q/p} = (q/p)^x \quad \text{pour tout } x \geq 0, \end{aligned}$$

notamment  $h^0(x) < 1$  pour tout  $x \geq 1$  : la ruine n'est pas certaine.

(ix) En comparant avec la ruine du joueur pour  $p = 1/2$ , l'attraction de 0 est plus forte, donc la ruine devrait être plus sûre. Comme elle est certaine pour  $p = 1/2$ , elle doit l'être aussi lorsque  $p_x = 1/2 - r_x$ ,  $x \geq 0$ . On a

$$\frac{q_x}{p_x} = \frac{1/2 + r_x}{1/2 - r_x} \geq 1.$$

Ainsi, chacun des produits figurant dans série définissant  $S$  est supérieur ou égal à 1 et donc la série est divergente :  $S = \infty$ . Ainsi la ruine est-elle sûre :  $h^0(x) = 1$  pour tout  $x \geq 0$ .

(x) Nous avons

$$\frac{q_x}{p_x} = \frac{1/2 - r_x}{1/2 + r_x} = \frac{1 - 2r_x}{1 + 2r_x} = 1 - \frac{4r_x}{1 + 2r_x} \sim 1 - 4r_x \quad \text{quand } x \rightarrow \infty,$$

l'équivalence résultant du fait que  $r_x$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers l'infini. Par conséquent le produit  $\prod_{x \geq 1} q_x/p_x$  est de même nature que la série  $\sum_{x \geq 1} r_x$  (on passe au logarithme, constate que  $\ln(q_x/p_x) \sim -4r_x$  puisque  $r_x$  tend vers 0, utilise le fait que deux séries à termes

de signes constants équivalents sont de même nature). Ainsi, si cette série converge, le produit infini converge vers une limite finie non nulle. La somme  $S$  de la série

$$1 + \sum_{x \geq 1} \frac{q_1}{p_1} \times \dots \times \frac{q_x}{p_x}$$

est infinie puisque son terme général, positif, ne tend pas vers 0. Ainsi, si  $\sum_{x \geq 1} r_x < \infty$ , la ruine est sûre,  $h^0(x) = 1$  pour tout  $x \geq 0$ .

Évidemment, si la série  $\sum_{x \geq 1} r_x$  diverge, le produit infini diverge aussi, plus précisément, les produits partiels tendent vers 0. La convergence ou non de la série de ces produits partiels dépend de leur vitesse de convergence vers 0 qui est liée à la vitesse de divergence de  $\sum_{x \geq 1} r_x$ . En discuter en toute généralité ne nous paraît pas intéressant dans le contexte d'un examen.

EXERCICE 2. — (i) Voici la matrice

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Le graphe est clairement connexe, donc la matrice  $P$  est irréductible. La matrice  $P$  est symétrique, donc on sait que la mesure uniforme est invariante. Par irréductibilité, la mesure de probabilité invariante est unique, c'est donc  $\pi = (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ .

(iii) D'un sommet impair on transite à un sommet pair et réciproquement. Ainsi, on ne peut retourner à son sommet initial qu'après un nombre pair de pas. Réciproquement, pour tout sommet  $x$ ,  $P^{2n}(x, x) \geq (1/3)^n > 0$ , ce minorant étant la probabilité de ne faire que des allers et retours avec les trois sommets voisins de  $x$ . Donc  $\{n \in \mathbb{N} : P^n(x, x) > 0\} = 2\mathbb{N}$ . La chaîne n'est pas apériodique (elle est périodique de période 2).

(iv) Soit  $k(x) = \mathbb{E}^x[H^6]$ . On a bien sûr  $k(6) = 0$ . Pour  $x \neq 6$ , on a  $H^6 \geq 1$ ,  $\mathbb{P}^x$ -presque sûrement. Par application de la propriété de Markov (les détails ont été vus assez souvent)

$$\begin{aligned} k(x) &= \mathbb{E}^x[H^6] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{E}^x[H^6 \mid X_1 = y] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{E}^y[1 + H^6] \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} + \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{E}^y[H^6] = 1 + \sum_{y \in E} P(x, y)k(y). \end{aligned}$$

On obtient spécifiquement (en notant que  $k(6) = 0$ ) et sans malice

$$\left\{ \begin{array}{l} k(1) = 1 + \frac{1}{3}(k(2) + k(4)) \\ k(2) = 1 + \frac{1}{3}(k(1) + k(3) + k(5)) \\ k(3) = 1 + \frac{1}{3}(k(2) + k(4)) \\ k(4) = 1 + \frac{1}{3}(k(1) + k(3) + k(5)) \\ k(5) = 1 + \frac{1}{3}(k(2) + k(4)) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k(1) = 1 + \frac{1}{3}(k(2) + k(4)) \\ k(2) = 1 + \frac{1}{3}(k(1) + k(3) + k(5)) \\ k(3) = k(1) \\ k(4) = k(2) \\ k(5) = k(1) \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} k(1) = 1 + \frac{2}{3}k(2) \\ k(2) = 1 + k(1) \\ k(3) = k(1) \\ k(4) = k(2) \\ k(5) = k(1) \end{cases} \quad \begin{cases} k(1) = 1 + \frac{2}{3}(1 + k(1)) \\ k(2) = 1 + k(1) \\ k(3) = k(1) \\ k(4) = k(2) \\ k(5) = k(1) \end{cases} \quad \begin{cases} k(1) = 5 \\ k(2) = 6 \\ k(3) = 5 \\ k(4) = 6 \\ k(5) = 5 \end{cases}$$

(v) On a évidemment  $\ell(5) = 1$  et  $\ell(6) = 0$ . Maintenant si  $x \in E$  est différent de 5 et de 6, on peut faire un pas et ainsi puis regarder ce qu'il se passe (propriété de Markov)

$$\begin{aligned} \ell(x) &= \mathbb{P}^x\{H^5 \leq H^6\} = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{P}^y\{H^5 \leq H^6 \mid X_1 = y\} \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{P}^y\{H^5 < H^6\} = \sum_{y \in E} P(x, y)\ell(y). \end{aligned}$$

Ainsi, en notant que  $\ell(5) = 1$  et  $\ell(6) = 0$ , on a

$$\begin{cases} \ell(1) = \frac{1}{3}(\ell(2) + \ell(4)) \\ \ell(2) = \frac{1}{3}(\ell(1) + \ell(3) + 1) \\ \ell(3) = \frac{1}{3}(\ell(2) + \ell(4)) \\ \ell(4) = \frac{1}{3}(\ell(1) + \ell(3) + 1) \end{cases} \quad \begin{cases} \ell(1) = \frac{1}{3}(\ell(2) + \ell(4)) \\ \ell(2) = \frac{1}{3}(\ell(1) + \ell(3) + 1) \\ \ell(3) = \ell(1) \\ \ell(4) = \ell(2) \end{cases} \quad \begin{cases} \ell(1) = \frac{2}{3}\ell(2) \\ \ell(2) = \frac{2}{3}\ell(1) + \frac{1}{3} \\ \ell(3) = \ell(1) \\ \ell(4) = \ell(2) \end{cases}$$

D'où  $\ell(1) = \ell(3) = 2/5$ ,  $\ell(2) = \ell(4) = 3/5$  et toujours  $\ell(5) = 1$  et  $\ell(6) = 0$ .

(vi) La matrice est de rang 2 de manière évidente puisqu'elle s'écrit

$$P = (U, V, U, V, U, V) \quad \text{avec} \quad U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{linéairement indépendants.}$$

Ceci implique que 0 est valeur propre d'ordre 4. C'est une matrice de transition, donc 1 est valeur propre d'ordre supérieur ou égal à 1. Sa trace est nulle, la somme des valeurs propres étant égale à la trace, il faut au moins une valeur propre strictement négative. Comme la somme des ordres est égal à 6, il ne peut y avoir qu'une valeur propre négative, qui tout comme 1 est d'ordre 1, cette valeur propre négative est donc  $-1$ .

(vii) D'après la théorie générale, nous avons  $P^n(x, y) = a(x, y) \times 1^n + b(x, y) \times (-1)^n$ , pour  $n \geq 1$ , la valeur propre 0 n'apportant aucune contribution (attention, pour  $n \geq 1$  mais pas  $n = 0$ ). Nous avons donc  $P^{2n+1} = P$  et  $P^{2n} = P^2$  où

$$P^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



(alors que  $P^0 = \text{Id}$ ). En raisonnant par blocs (produit tensoriel), nous avons

$$P = \frac{1}{3}U_3 \otimes J_2 \quad \text{avec} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme  $J_2^2 = \text{Id}_2$  et  $(\frac{1}{3}U_3)^2 = \frac{1}{3}U_3$ , on a

$$P^2 = \left(\frac{1}{3}U_3 \otimes J_2\right) \times \left(\frac{1}{3}U_3 \otimes J_2\right) = \left(\frac{1}{3}U_3\right)^2 \otimes (J_2)^2 = \frac{1}{3}U_3 \otimes \text{Id}_2,$$

ce qui est écrit plus haut, et permet de voir de plus comment se calculent les puissances successives.

(viii) Il est clair que si on part d'une mesure initiale qui ne charge pas les sommets pairs autant que les sommets impairs, il n'y aura pas convergence vers l'équilibre, ici la mesure uniforme, puisque ces charges ne feront qu'osciller. La périodicité de la chaîne laissait suspecter qu'il n'y aurait pas convergence vers l'équilibre.

EXERCICE 3. — (i) Assez clairement, pour tout  $(z, z') \in E^2$ ,

$$P(z, z') = P((x, y), (x', y')) = \begin{cases} \frac{x}{x+y} & \text{si } x' = x + c, y' = y, \\ \frac{y}{x+y} & \text{si } x' = x, y' = y + c, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

ou plus clairement

$$P((x, y), (x + c, y)) = \frac{x}{x+y} \quad \text{et} \quad P((x, y), (x, y + c)) = \frac{y}{x+y}.$$

Si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est une application bornée ou de signe constant, par définition  $Pf$  est l'application définie par

$$Pf(z) = Pf(x, y) = \sum_{z' \in E} P(z, z')f(z') = \frac{x}{x+y} \times f(x+c, y) + \frac{y}{x+y} \times f(x, y+c)$$

pour  $z = (x, y) \in E$ .

(ii) Puisque  $\mathcal{F}$  est la filtration naturelle de  $Z$ ,  $Z_n = (X_n, Y_n)$  est  $\mathcal{F}_n$ -mesurable et donc  $M_n = X_n/(X_n + Y_n) = f(Z_n)$  qui est une fonction mesurable de  $Z_n$  l'est aussi. De plus  $M_n$  est intégrable puisque bornée. Pour  $n \geq 0$ , par la propriété de Markov on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[f(Z_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[f(Z_{n+1}) | Z_n] \\ &= Pf(Z_n) = \frac{X_n}{X_n + Y_n} \times f(X_n + c, Y_n) + \frac{Y_n}{X_n + Y_n} \times f(X_n, Y_n + c) \\ &= \frac{X_n}{X_n + Y_n} \times \frac{X_n + c}{X_n + Y_n + c} + \frac{Y_n}{X_n + Y_n} \times \frac{X_n}{X_n + Y_n + c} \\ &= \frac{X_n}{X_n + Y_n} \times \frac{X_n + Y_n + c}{X_n + Y_n + c} \\ &= M_n \end{aligned}$$

$\mathbb{P}$ -presque sûrement. Ce qui montre que  $M$  est une martingale.

(iii) Nous avons  $X_n + Y_n = a + c + n \times c$  pour tout  $n \geq 0$  qui tend vers l'infini. Les deux composantes de  $Z = (X, Y)$  étant croissantes, l'une au moins tend vers l'infini, c'est donc aussi le cas de  $Z$ . En ce qui concerne la martingale  $M$ , elle est bornée. Nous savons qu'elle converge alors dans tous les espaces  $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ,  $p \geq 1$ , et que de plus elle converge presque sûrement, et donc aussi en loi. (Ce que nous ne savons pas est que la loi de la variable aléatoire limite est la loi Beta  $B(a/c, b/c)$ .)

(iv) Puisque l'auteur de ce corrigé a un clavier d'ordinateur sous les doigts, en fait de pseudo-langage, ce sera du SCILAB. On pourra d'ailleurs tester le programme. . . il n'est pas long après tout ! et il contient une ou deux idées intéressantes (paramétrage des titres de figures).

On a une probabilité  $a/(a+b)$  de tirer une boule rouge et donc de passer à l'état  $(a+c, b)$ , sinon on passe à l'état  $(a, b+c)$ . Le choix se fait en tirant un nombre uniformément dans  $[0, 1]$  à l'aide de la fonction `rand()` (ou `grand(1,1,"def")`) et en le comparant à cette probabilité.

```
mode(0); clear;

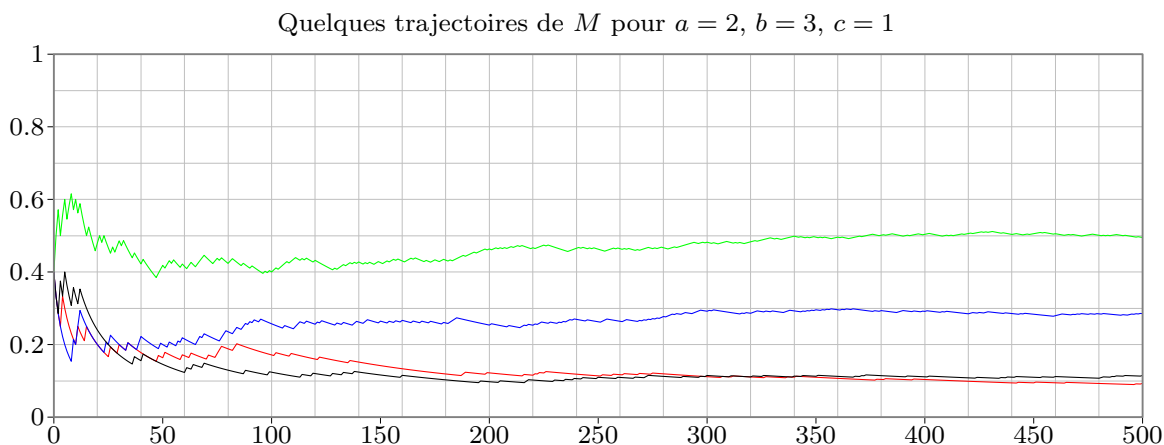
function [x, y] = polyastep(a, b, c);
    if rand() < a/(a+b) then x = a+c; y = b; else x = a; y = b+c; end
endfunction
```

Pour faire une simulation, on a besoin des conditions initiales  $(a, b)$  et du paramètre  $c$ . Le reste est clair. Notons qu'on ne changera pas en cours de simulation les valeurs de  $a$  et de  $b$ . Nous tracerons 4 trajectoires stockées dans  $M(1:T+1, i)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

```
a = 2; b = 3; c = 1; T = 500;

M = [];
for i = 1:4;
    x = a; y = b;
    M(1,i) = x/(x+y);
    for t = 1:T;
        [x, y] = polyastep(x, y, c);
        M(t+1, i) = x/(x+y);
    end
end

scf(0); clf();
plot2d([0:T]', M);
xlabel("Quelques trajectoires de M pour a = "..
    +string(a)+", b = "+string(b)+", c = "+string(c));
```



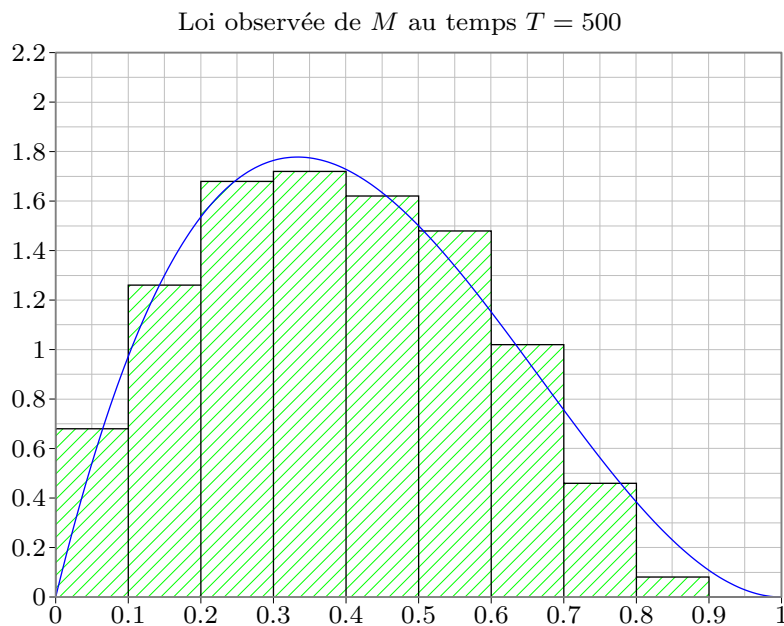
Passons à l'allure de la loi limite. Nous nous plaçons à  $T$  grand en espérant que la loi de  $M_T$  est proche de celle de  $M_\infty$ . Puis nous simulons un nombre  $n$  grand de valeurs de  $M_T$ , valeurs dont nous traçons un histogramme.

```
n = 500;
M = [];
for i = 1:n;
    x = a; y = b;
    for t = 1:T; [x, y] = polyastep(x, y, c); end
```

```

M(i) = x/(x+y);
end
function y = betapdf(x, a, b);
    if x <= 0 | x >= 1 then y = 0;
    else y = x^(a-1)*(1-x)^(b-1)/beta(a,b);
    end
endfunction
scf(1); clf();
histplot(ceil(1+3.322*log10(n)), M); // r\‘egle de Sturges
x = linspace(0,1,100)'; y = [];
for i = 1:size(x,1); y(i) = betapdf(x(i), a/c, b/c); end
plot2d(x, y);
xtitle("Loi observee de M au temps T = "+string(T));

```



On notera qu'on a tenu compte de l'information supplémentaire selon laquelle la loi limite est la loi  $B(a/c, b/c)$ . Nous savons que la commande `beta(a,b)` retourne la valeur de

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx.$$

Nous nous serons servi de cette fonction pour définir `betapdf` (*Beta probability density function*) et ainsi tracer la densité de la loi limite.



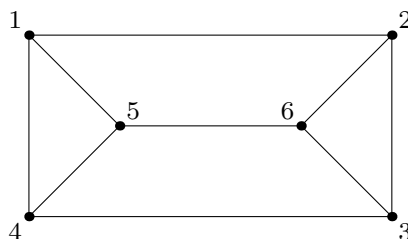
PROCESSUS À TEMPS DISCRET. — EXAMEN DE SECONDE SESSION

14 juin 2010, 8h30–12h30, IFMI 12

EXERCICE 1 (SEMI-GROUPE DE POISSON). — Soit  $P_t(x, dy) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \delta_{\{x+n\}}(dy)$  où  $\lambda > 0$  est une constante,  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Montrer que pour chaque  $t \geq 0$ ,  $P_t$  est un noyau de probabilité (ou markovien) sur  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Montrer que  $(P_t)_{t \geq 0}$  est un semi-groupe de transition sur  $\mathbb{R}$ .

EXERCICE 2. — Nous considérons le graphe suivant



La chaîne de Markov  $X$  considérée (ou plus précisément  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, X, (\mathbb{P}^x)_{x=1}^6)$ ) est définie par le fait que de tout sommet on a probabilité  $1/3$  de transiter vers chacun des 3 sommets adjacents.

- (i) Écrire la matrice de transition  $P$  associée à cette description.
- (ii) Expliquer pourquoi la matrice de transition  $P$  est irréductible. Justifier l'existence et l'unicité de sa mesure de probabilité invariante, déterminer cette mesure.
- (iii) La chaîne est-elle apériodique?
- (iv) Soit  $H^1 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}$  le temps d'atteinte de 1. Déterminer  $k(x) = \mathbb{E}^x[H^1]$  le temps moyen d'atteinte de 1 partant de  $x \in E = \{1, \dots, 6\}$ . Pour cela, on montrera que pour tout  $x \neq 1$ ,

$$k(x) = 1 + \sum_{y \in E} P(x, y)k(y),$$

puis on résoudra le système linéaire obtenu.

- (v) Déterminer  $\mathbb{E}^1[T_e^1]$  le temps de retour moyen en 1, où  $T_e^1 = \inf\{n > 0 : X_n = 1\}$ , en se servant des résultats précédents.
- (vi) On s'intéresse maintenant à la probabilité  $\ell(x)$  d'atteinte de 5 avant d'atteindre 6 en étant parti de  $x \in E$ . Établir avec justifications le système linéaire satisfait par  $\ell(x)$ ,  $x \in E$ . Le résoudre.
- (vii) Calculer le polynôme caractéristique  $\chi_P$  de  $P$  et déterminer les valeurs propres de  $P$  ainsi que leur ordre.
- (viii) Établir à l'aide des résultats de la question précédente que la suite des puissances  $(P^n)_{n \geq 0}$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- (ix) Sans calcul supplémentaire, mais avec justifications, déterminer la limite  $P_\infty$  de la suite des puissances de  $P$ .

(x) Conclure sur la question de la convergence vers l'équilibre en lien avec la réponse sur l'apériodicité de  $P$ .

EXERCICE 3 (LE MODÈLE DE WRIGHT–FISHER). — Une population de taille constante  $N$  évolue sans mutation au cours du temps. Les individus sont de deux types, A et B. La génération initiale comporte  $m$  individus du type A et  $N - m$  individus du type B. Chaque individu de la  $(n + 1)$ -ième génération a un parent tiré au sort avec équiprobabilité parmi les  $N$  individus de la génération précédente et hérite du type de son unique parent. Tous les tirages sont supposés indépendants.

Soit  $X_n$  le nombre d'individus de type A dans la  $n$ -ième génération.

- (i) Pour  $n \geq 1$ , quelle est la loi de  $X_n$  conditionnellement à  $X_{n-1}$  ?
- (ii) En admettant que le processus  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  forme une chaîne de Markov homogène d'espace d'états  $E = \{0, 1, \dots, N\}$  dans une certaine filtration  $\mathcal{F}$ , et de valeur initiale  $m$ , préciser sa matrice de transition  $P$ .
- (iii) Déterminer les classes communicantes de la chaîne ainsi que leur classification.
- (iv) En déduire que la chaîne est presque sûrement convergente de valeurs limites possibles 0 ou  $N$ .
- (v) Montrer que  $X$  est une martingale bornée dans cette certaine filtration  $\mathcal{F}$ .
- (vi) Notons  $T = \inf\{n \geq 0 : X_T \in \{0, N\}\}$ , le temps de « fixation » de la chaîne. En utilisant le théorème d'arrêt de Doob, déterminer  $\mathbb{P}^m\{X_T = N\}$  et  $\mathbb{P}^m\{X_T = 0\}$ .
- (vii) Définir en pseudo-langage (voisin de SCILAB) une commande `wrightstep` d'arguments  $(x, N)$ ,  $x$  étant le nombre d'individus de type A,  $N$  la taille totale de la population, retournant le nombre d'individus  $y$  de type A à la génération suivante. L'utiliser dans un pseudo-script destiné à observer la convergence le long d'une trajectoire. L'utiliser dans un autre pseudo-script destiné à estimer les probabilités calculées à la question précédente. Ces pseudo-programmes doivent virtuellement fonctionner, il faudra notamment donner des paramètres de simulation.

PROCESSUS À TEMPS DISCRET. — CORRECTION  
DE L'EXAMEN DE SECONDE SESSION

14 juin 2010, 8h30–12h30, IFMI 12

EXERCICE 1. — (i) Soit  $t \geq 0$ .

Pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé,  $P_t(x, dy)$  est la somme d'une série de mesures positives sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . C'est donc une mesure positive et on a :

$$P_t(x, \mathbb{R}) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = 1.$$

Ainsi  $P_t(x, dy)$  est une mesure de probabilité.

Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée fixée, on a

$$P_t f(x) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} f(x + n).$$

Comme pour tout  $n \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R} \mapsto (x + n) \mapsto f(x + n)$  est mesurable par composition,  $P_t f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une série convergente de fonctions mesurables, elle est donc mesurable. En particulier, si  $f = \mathbb{1}_B$  pour  $B$  borélien de  $\mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R} \mapsto P_t(x, B)$  est mesurable.

Donc  $P_t$  est un noyau de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

(ii) Soient  $s, t \geq 0$ . Par définition de la composition des noyaux, pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on a

$$\begin{aligned} P_s P_t(x, B) &= \int_{\mathbb{R}} P_s(x, dy) P_t(y, B) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda s} \sum_{m \geq 0} \frac{(\lambda s)^m}{m!} \delta_{\{x+m\}}(dy) e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{1}_B(y + n) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda(s+t)} \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda s)^m (\lambda t)^n}{m! n!} \delta_{\{x+m\}}(dy) \mathbb{1}_B(y + n) \\ &= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda s)^m (\lambda t)^n}{m! n!} \int_{\mathbb{R}} \delta_{\{x+m\}}(dy) \mathbb{1}_B(y + n) \\ &= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda s)^m (\lambda t)^n}{m! n!} \mathbb{1}_B(x + m + n) \end{aligned}$$

tout étant positif, on aura interverti les sens de sommation en utilisant le théorème de Fubini–Tonelli. En changeant d'indices  $k = m + n$ ,  $\ell = m$  (ce changement d'indices a été vu en L3 et en M1 premier semestre, des erreurs ne sont donc pas pardonnables), par convergence

commutative, on a

$$\begin{aligned}
 P_s P_t(x, B) &= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{k \geq 0} \sum_{\ell=0}^k \frac{(\lambda s)^\ell (\lambda t)^{k-\ell}}{\ell! (k-\ell)!} \mathbb{1}_B(x+k) \\
 &= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \sum_{\ell=0}^k \frac{k!}{\ell! (k-\ell)!} (\lambda s)^\ell (\lambda t)^{k-\ell} \right) \mathbb{1}_B(x+k) \\
 &= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{k \geq 0} \frac{(\lambda s + \lambda t)^k}{k!} \mathbb{1}_B(x+k) \\
 &= P_{s+t}(x, B)
 \end{aligned}$$

La famille de noyaux de transition  $(P_t)_{t \geq 0}$  vérifie donc la propriété de semi-groupe, c'est un semi-groupe de transition.

EXERCICE 2. — (i) Voici la matrice

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Le graphe est clairement connexe, donc la matrice  $P$  est irréductible. La matrice  $P$  est symétrique, donc on sait que la mesure uniforme est invariante. Par irréductibilité, la mesure de probabilité invariante est unique, c'est donc  $\pi = (1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6, 1/6)$ .

(iii) Elle est apériodique. En effet, on peut retourner en tout sommet  $x$  en 2 pas ou en 3 pas. Ainsi pour  $n \geq 3$ , si  $n$  est pair, en faisant des allers-retours entre  $x$  et l'un de ses sommets voisins, on a  $P^n(x, x) \geq (1/3)^{n/2} > 0$ , et si  $n$  est impair, on commence par faire une boucle de longueur 3 donnée, puis on fait des allers-retours, ainsi  $P^n(x, x) \geq (1/3)^3 \times (1/3)^{(n-3)/2} > 0$ .

(iv) Soit  $k(x) = \mathbb{E}^x[H^1]$ . On a bien sûr  $k(1) = 0$ . Pour  $x \neq 1$ , on a  $H^1 \geq 1$ ,  $\mathbb{P}^x$ -presque sûrement. Par application de la propriété de Markov (les détails ont été vus assez souvent)

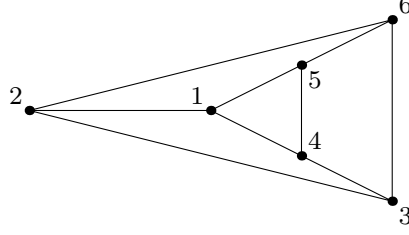
$$\begin{aligned}
 k(x) = \mathbb{E}^x[H^1] &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{E}^x[H^1 \mid X_1 = y] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{E}^y[1 + H^1] \\
 &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} + \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{E}^y[H^1] = 1 + \sum_{y \in E} P(x, y)k(y).
 \end{aligned}$$

On obtient spécifiquement (en notant que  $k(1) = 0$ ) et sans malice

$$\begin{cases} k(2) = 1 + \frac{1}{3}(k(3) + k(6)) \\ k(3) = 1 + \frac{1}{3}(k(2) + k(4) + k(6)) \\ k(4) = 1 + \frac{1}{3}(k(3) + k(5)) \\ k(5) = 1 + \frac{1}{3}(k(4) + k(6)) \\ k(6) = 1 + \frac{1}{3}(k(2) + k(3) + k(5)) \end{cases}$$



Redessinons le graphe



ce qui fait apparaître une symétrie qui implique (sous réserve d'unicité des solutions au système) que  $k(4) = k(5)$  et  $k(3) = k(6)$ . On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} k(2) = 1 + \frac{2}{3} k(3) \\ k(3) = 1 + \frac{1}{3} (k(2) + k(3) + k(4)) \\ k(4) = 1 + \frac{1}{3} (k(3) + k(4)) \\ k(5) = k(4) \\ k(6) = k(3) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k(2) = 1 + \frac{2}{3} k(3) \\ k(3) = 1 + \frac{1}{3} (k(2) + k(3) + k(4)) \\ k(4) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} k(3) \\ k(5) = k(4) \\ k(6) = k(3) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k(2) = 1 + \frac{2}{3} k(3) \\ k(3) = 1 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} k(3) + k(3) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} k(3) \right) \\ k(4) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} k(3) \\ k(5) = k(4) \\ k(6) = k(3) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} k(2) = 1 + \frac{2}{3} k(3) \\ k(3) = \frac{33}{5} \\ k(4) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} k(3) \\ k(5) = k(4) \\ k(6) = k(3) \end{array} \right.$$

d'où finalement

$$k(2) = \frac{27}{5}, \quad k(3) = \frac{33}{5}, \quad k(4) = \frac{24}{5}, \quad k(5) = \frac{24}{5}, \quad k(6) = \frac{33}{5}.$$

Qu'on se rassure, la symétrie a été vue par la résolution directe du système. Utiliser cet argument aura seulement simplifié la saisie en  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  des calculs.

(v) En utilisant la propriété de Markov après 1 pas,

$$\mathbb{E}^1[T_e^1] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^1\{X_1 = y\} \mathbb{E}^1[T_e^1 | X_1 = y] = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^1\{X_1 = y\} \mathbb{E}^y[1 + H^1] = 1 + \sum_{y \in E} P(1, y)k(y).$$

Soit  $\mathbb{E}^1[T_e^1] = 1 + \frac{1}{3}(k(2) + k(4) + k(5)) = 6$ .

(vi) On a évidemment  $\ell(5) = 1$  et  $\ell(6) = 0$ . Maintenant si  $x \in E$  est différent de 5 et de 6, on peut faire un pas et ainsi puis regarder ce qu'il se passe (propriété de Markov)

$$\begin{aligned} \ell(x) &= \mathbb{P}^x\{H^5 < H^6\} = \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{P}^y\{H^5 < H^6 | X_1 = y\} \\ &= \sum_{y \in E} \mathbb{P}^x\{X_1 = y\} \mathbb{P}^y\{H^5 < H^6\} = \sum_{y \in E} P(x, y)\ell(y). \end{aligned}$$

Ainsi, en notant que  $\ell(5) = 1$  et  $\ell(6) = 0$ , on a

$$\begin{cases} \ell(1) = \frac{1}{3}(\ell(2) + \ell(4) + 1) \\ \ell(2) = \frac{1}{3}(\ell(1) + \ell(3)) \\ \ell(3) = \frac{1}{3}(\ell(2) + \ell(4)) \\ \ell(4) = \frac{1}{3}(\ell(1) + \ell(3) + 1) \end{cases} \quad \begin{cases} 2\ell(1) = \ell(2) + 1 \\ 2\ell(2) = \ell(1) \\ \ell(3) = \ell(2) \\ \ell(4) = \ell(1) \end{cases} \quad \begin{cases} \ell(1) = \frac{2}{3} \\ \ell(2) = \frac{1}{3} \\ \ell(3) = \ell(2) \\ \ell(4) = \ell(1) \end{cases}$$

D'où  $\ell(1) = \ell(4) = 2/3$ ,  $\ell(2) = \ell(3) = 1/3$  et toujours  $\ell(5) = 1$  et  $\ell(6) = 0$ .

(vii) On peut calculer le polynôme caractéristique de  $3P$  — matrice de 0 et de 1 —, puis obtenir  $\chi_P(x) = \frac{1}{3^6}\chi_{3P}(3x)$ . Par exemple avec SCILAB,

```
P=[0, 1, 0, 1, 1, 0;
1, 0, 1, 0, 0, 1;
0, 1, 0, 1, 0, 1;
1, 0, 1, 0, 1, 0;
1, 0, 0, 1, 0, 1;
0, 1, 1, 0, 1, 0];
chi = det(P-%s*eye(6,6))
```

Le calcul donne

$$\chi_{3P}(x) = x^6 - 9x^4 - 4x^3 + 12x^2 \quad \text{et} \quad \chi_P(x) = x^6 - x^4 - \frac{4}{27}x^3 + \frac{4}{27}x^2.$$

Pour ses racines, nous savons déjà que 1 est racine et il est visible que 0 l'est aussi avec pour ordre 2. On a donc, après une division euclidienne par exemple

$$\chi_P(x) = x^2(x-1)\left(x^3 + x^2 - \frac{4}{27}\right).$$

Pour le dernier facteur, on s'en remet à la recherche de racines « évidentes » :  $4/27$  est le produit des racines, on les recherche sous la forme  $x/3$ , ce qui donne pour équation  $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$ ; 1 est solution, alors  $x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)(x+2)^2 = 0$ ; ainsi les 3 racines restantes de  $\chi_P$  sont  $1/3$  d'ordre 1 et  $-2/3$  d'ordre 2. On a donc les racines avec leur ordre :

$$\{(1, 1), (1/3, 1), (0, 2), (-2/3, 2)\}$$

(viii) Les coefficients de  $P^n$  sont de la forme

$$P^n(x, y) = a_1(x, y) \times 1^n + a_{1/3}(x, y) \times (1/3)^n \\ + a_0(x, y) \times 0^n + b_0(x, y) \times n \times 0^n + a_{-2/3}(x, y) \times (-2/3)^n + b_{-2/3}(x, y) \times n \times (-2/3)^n$$

soit, pour  $n \geq 1$ ,

$$P^n(x, y) = a_1(x, y) + a_{1/3}(x, y)/3^n + a_{-2/3}(x, y) \times (-2/3)^n + b_{-2/3}(x, y) \times n \times (-2/3)^n$$

et on constate sans calcul que  $P^n(x, y)$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini vers le coefficient  $a_1(x, y)$ . Donc, la suite  $(P^n)_{n \geq 1}$  est convergente.

(ix) Nous savons que si  $(P^n)_{n \geq 0}$  converge, chaque ligne de sa limite  $P_\infty$  est une mesure de probabilité invariante. D'après la question (ii) chaque ligne est égale à  $\pi$  et donc  $P_\infty = \frac{1}{6}U_6$  où  $U_6$  est la matrice unaire de dimensions  $6 \times 6$ .

(x) Nous savons déjà que  $P$  est irréductible, (positivement) récurrente, apériodique, et donc qu'il y a convergence vers l'équilibre : pour toute loi initiale  $\lambda$  la suite des lois de la chaîne  $(\lambda P^n)$  converge vers  $\pi$ . C'est ce que nous retrouvons avec les calculs précédents :  $\lambda P_\infty = 1/6 \lambda U_6 = 1/6(1, 1, 1, 1, 1, 1) = \pi$ .

EXERCICE 3 (LE MODÈLE DE WRIGHT-FISHER). — (i) La détermination du type des  $N$  individus de la génération  $n$  est un schéma de Bernoulli de paramètre  $N$  et  $X_{n-1}/N$  (le « succès » correspondant à avoir le type A). Ainsi, conditionnellement à  $X_{n-1}$ , la loi de  $X_n$  est la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $X_{n-1}/N$ .

(ii) La matrice de transition  $P$  sur  $E = \{0, \dots, N\}$  est donnée par

$$P(x, y) = \mathbb{P}\{X_n = y \mid X_{n-1} = x\} = C_N^y (x/N)^y (1 - x/N)^{N-y}, \quad x, y \in E$$

d'après la question précédente.

(iii) On constate que 0 et  $N$  ne communiquent qu'avec eux-mêmes, ainsi  $\{0\}$  et  $\{N\}$  sont deux classes fermées (ou absorbantes), alors que si  $x \in \{1, \dots, N-1\}$ ,  $x$  mène en 1 pas à tout  $y \in E$ . On en déduit que  $\{1, \dots, N-1\}$  est une classe communicante, mais qu'elle est transiente car non fermée.

(iv) Si  $m = 0$  ou  $m = N$ , la chaîne est stationnaire. Si  $m \in \{1, \dots, N-1\}$ , alors le temps de sortie de  $\{1, \dots, N-1\}$  est fini presque sûrement par transience, la chaîne atteint alors 0 ou  $N$  pour y demeurer. Dans tous les cas la chaîne stationne à partir d'un certain temps aléatoire en 0 ou  $N$ , notamment, elle converge presque sûrement.

(v) Chaque variable  $X_n$  étant bornée, elles sont intégrables. Comme la loi de  $X_n$  conditionnellement à  $X_{n-1}$  est la loi binomiale de paramètres  $N$  et  $X_{n-1}/N$ , on a, d'une part par la propriété de Markov, ensuite parce que l'espérance d'une variable de loi  $\mathcal{B}(N, p)$  est  $Np$ ,

$$\mathbb{E}^m[X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}^m[X_n \mid X_{n-1}] = N \times X_{n-1}/N = X_{n-1} \quad \text{presque sûrement.}$$

Ainsi,  $X$  est bien une martingale dans la filtration  $\mathcal{F}$ .

(vi) On sait que  $X_T$  est à valeurs dans  $\{0, N\}$ , et ainsi

$$\mathbb{E}^m[X_T] = 0 \times \mathbb{P}^m\{X_T = 0\} + N \times \mathbb{P}^m\{X_T = N\} = N \times \mathbb{P}^m\{X_T = N\}.$$

La martingale  $X$  étant bornée et  $T$  étant un temps d'arrêt, le théorème d'arrêt de Doob nous permet d'affirmer que

$$\mathbb{E}^m[X_T] = \mathbb{E}^m[X_0] = m.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}^m\{X_T = N\} = m/N \quad \text{et} \quad \mathbb{P}^m\{X_T = 0\} = 1 - \mathbb{P}^m\{X_T = N\} = (N - m)/N.$$

(vii) Finissons en programmant.

```
clear(); mode(0);
```

```
function y = wrightstep(x, N); // nom plus sympa sans fisher
    y = 0;
    for i = 1:N; if rand() < x/N then y = y + 1; end end
endfunction
```

```
// quelques param\`etres
N = 100; // taille totale
m = 40; // valeur initiale
n = 1000; // taille d'\`echantillon
T = 100; // horizon temporel pour repr\`esenter quelques trajectoires
k = 10; // nombre de trajectoires
```

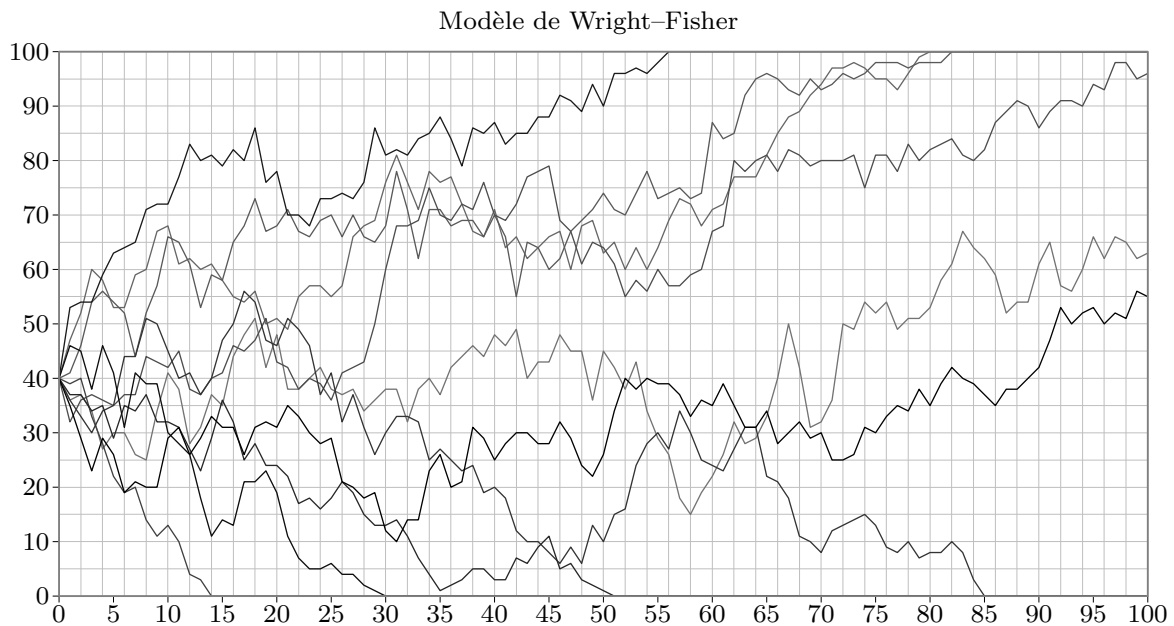
```
// quelques trajectoires
x = zeros(T+1, k);
for i = 1:k;
    x(1, i) = m;
    for t = 1:T;
        x(t+1, i) = wrightstep(x(t, i), N);
    end
end

clf();
plot2d([0:T]', x); xtitle("Modele de Wright-Fisher");

// estimation des probabilités
p = 0;
for i = 1:n;
    x = m;
    while(x > 0 & x < N); x = wrightstep(x, N); end
    if x == N then p = p+1; end
end
p = p/n;

mprintf("Probabilite d'atteinte de N = %.4f\n", m/N);
mprintf("Proportion observee = %.4f\n", p);
```

Ce qui aura pu donner :



Probabilite d'atteinte de N = 0.4000

Proportion observee = 0.4000