Université de Poitiers
Département de Mathématiques

2M12–Processus à temps discret
MMAS 1, Année 2009–10

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\mathrm{O}}$ 1, GÉNÉRALITÉS

Exercice 1 (lois binomiales négatives). — On considére le jeu classique et infini de « pile ou face » (schéma de Bernoulli infini), la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0,1[$.

(i) Décrire le modèle probabilisé filtré correspondant. On calculera aussi le cardinal de chaque tribu de la filtration associée.

(ii) Soit T_1 le premier instant d'obtention d'un « pile ». Montrer qu'il s'agit d'un temps d'arrêt et déterminer sa loi.

(iii) On définit T_n comme n-ième instant d'obtention de « pile ». Préciser sa définition, montrer qu'il s'agit d'un temps d'arrêt et déterminer sa loi.

(iv) Que dire si $p = 0$ ou $p = 1$?

Exercice 2. — Soient $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ et $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}$ un temps d'arrêt. Montrer que X_T est une variable aléatoire et qu'elle est de plus $\mathcal{F}_T$-mesurable. Étendre ce résultat lorsque le temps d'arrêt $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ n'est pas nécessairement fini.

Exercice 3. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré avec $\mathcal{F} = (\mathcal{F})_{n\geqslant 0}$, et S, T deux temps d'arrêt, alors $S + T$ est un temps d'arrêt. Cette propriété vous paraît-elle vraie si l'ensemble des temps est $\mathbb{Z}, \dots, \mathbb{R}_+$?

Exercice 4 *(identité de Wald)*. — On considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \in \mathbb{N}^*$, intégrables de même espérance $\mathbb{E}[X_n] = \mu$. La filtration considérée est celle du processus X, avec $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ la tribu triviale. Dans cette filtration, nous considérons un temps d'arrêt $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ qui est supposé d'espérance finie ($\mathbb{E}[T] < \infty$).

Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{T} X_n\right] = \mathbb{E}[T] \times \mu.$$

(On pourra commencer par considérer les X_n de signe constant et égal, puis passer au cas général.)

Exercice 5. — Soient $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ un processus défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace d'états $(E, \mathcal{E})$ et $A \in \mathcal{E}$ un sous-ensemble mesurable de E.

(i) Le temps atteinte de A par le processus X est

$$H^A = \inf\{n \geqslant 0 : X_n \in A\}.$$

On définit naturellement H_r^A le temps de r-ième atteinte de A pour $r \geqslant 1$. Montrer que ce sont des temps d'arrêt pour la filtration naturelle $\mathcal{F}^X$ du processus X.

(ii) Le temps de dernier retour dans A par le processus X est

$$L^A = \sup\{n \geqslant 0 : X_n \in A\}.$$

Constater que rien n'indique que ce soit un temps d'arrêt en général pour $\mathcal{F}^X$.

(iii) Supposons le processus déterministe : $X = (x_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de variables aléatoires constantes. Quelle est sa filtration naturelle ? Que dire des temps d'atteinte et de dernier retour ?

(iv) On suppose maintenant que le processus X est à accroissements indépendants à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et que plus précisément $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$ où X_0 et les $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ identiquement distribuées de loi $(1-p)\delta_{\{-1\}} + p\delta_{\{1\}}$ ($X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire simple [non nécessairement symétrique] sur $\mathbb{Z}$) avec $p \in\,]0,1[$. Discuter, pour $A = \{\dots,-2,-1\} = \mathbb{Z}_-^*$, du fait que L^A puisse être un temps d'arrêt du processus X ou non.

Exercice 6. — Le processus X considéré correspond encore au schéma de Bernoulli infini avec un paramètre $p \in\,]0,1[$.

(i) On définit

$$T = \begin{cases} 2 & \text{si } X_0 = 1, \\ 3 & \text{si } X_0 = 0. \end{cases}$$

Montrer que c'est un temps d'arrêt dans la filtration naturelle de X.

(ii) On définit

$$T' = \begin{cases} 2 & \text{si } X_3 = 1, \\ 3 & \text{si } X_3 = 0. \end{cases}$$

Montrer que ce n'est pas un temps d'arrêt dans cette même filtration.

(iii) Que dire de T' si $p = 0$ ou 1 ? (On pourra supposer les variables aléatoires identiquement égales à leurs valeurs presque sûres.)

Exercice 7. — Considérons une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, symétrique ($p = 1/2$) et $A = \{1\}$. Établir que

$$\mathbb{P}\{T^A \leqslant 2k, X_{2k} \leqslant 1\} = \mathbb{P}\{T^A \leqslant 2k, X_{2k} \geqslant 1\},$$

puis $\mathbb{P}\{T^A \leqslant 2k\} = 1 - \mathbb{P}\{X_{2k} = -1\}$. En déduire la fonction de répartition de T^A.

Exercice 8 (le collectionneur de vignettes). — Pierre achète des tablettes de chocolat d'une certaine marque. Dans chaque tablettes, il trouve une vignette qu'il peut coller dans un album édité par cette même marque. L'album contient m emplacements. Soient $T_1 = 1$, puis T_2 le rang d'obtention d'une vignette différente de la première, puis T_3 celui d'obtention d'une vignette différente des deux première, etc. , jusqu'à T_m le rang de complétion de l'album. On pose $U_1 = T_1 = 1$, $U_2 = T_2 - T_1, \dots, U_m = T_m - T_{m-1}$.

(i) Modéliser le processus d'obtention des vignettes avec des hypothèses raisonnables.

(ii) Déterminer la loi de la variable aléatoire discrète $(U_1, \dots, U_n)$.

(iii) En déduire que les variables $U_1, \dots, U_n$ sont indépendantes.

(iv) En déduire la fonction génératrice de T_m ainsi que son espérance.

Exercice 9 (contrôle des naissances). — Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de bernoulli symétrique $\mathcal{B}(1, 1/2)$. Les valeurs obtenues correspondent à la naissance au n-ième essai d'un garçon ou d'une fille, et on suppose qu'il n'y a pas de naissance multiple. Les parents se fixent certains objectifs ce qui conduit à temps d'arrêt N qui est le nombre d'enfants obtenus.

D'après l'identité de Wald, quels que soient les objectifs choisis par les parents, la moyenne de garçons (ou de filles) obtenus est $\mathbb{E}[N]/2$, et donc, ne dépend que de l'espérance du temps d'arrêt N.

(i) La famille décide d'arrêter de procréer dès qu'elle a obtenu deux garçons consécutivement. Évaluer le nombre moyen d'enfants et de garçons dans la famille.

(ii) La famille décide d'arrêter de procréer dès qu'elle a obtenu un garçon succédant immédiatement à une fille. Évaluer le nombre moyen d'enfants et de garçons dans la famille.

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{O}}$ 2, MARTINGALES À VALEURS DANS $\mathbb{R}^N$

EXERCICE 1. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré.

(i) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $X_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \,|\, \mathcal{F}_n] = \mathbb{P}(A \,|\, \mathcal{F}_n)$ définit une martingale. Est-elle convergente ? Si oui, que dire de sa limite (noter qu'*a priori* on a seulement $\mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{A}$) ?

(ii) Montrer que pour tout $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $X_n = \mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{F}_n]$ définit une martingale. Est-elle convergente ? Si oui, que dire de sa limite ?

EXERCICE 2. — Soient $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées et intégrables. On pose $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ pour $n \geqslant 1$ et $X_0 = 0$. La filtration $\mathcal{F}$ considérée étant la filtration naturelle de $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ (avec $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$), que dire du processus X en fonction de $\mu = \mathbb{E}[\xi_1]$?

EXERCICE 3. — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré où le temps est $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. En posant (avec $\mathcal{F}_{-1} = \{\varnothing, \Omega\}$), on dit qu'un processus $H = (H_n)_{n\geqslant 0}$ est prévisible si pour tout $n \geqslant 0$, H_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Montrer que si X est une martingale et H un processus prévisible localement borné (ce qui signifie ici que chaque H_n est une variable aléatoire bornée), alors

$$Y_0 = 0, \qquad Y_n = \sum_{k=1}^n H_k \times (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^n H_k \Delta X_k, \quad n \geqslant 1,$$

définit une martingale.

Remarque. — Cette manière d'obtenir une martingale à partir d'une autre est souvent appelée *transformée de Burkhölder*, c'est en fait la version discrète de l'intégrale stochastique par rapport à une martingale.

EXERCICE 4 (MARTINGALE DE WALD). — Soient $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées admettant une fonction génératrice $G(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{u\xi_n}] \in \,]0, \infty[$ pour au moins un réel $u \neq 0$. Montrer que

$$X_0 = 1, \qquad X_n = G(u)^{-n}\, \mathrm{e}^{u(\xi_1 + \cdots + \xi_n)}, \quad n \geqslant 1,$$

définit une martingale.

EXERCICE 5 (VARIATION QUADRATIQUE). — Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ une martingale réelle telle que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ pour tout n.

(i) Que dire de $X^2 = (X_n^2)_{n\geqslant 0}$?

(ii) On définit la variation quadratique (crochet droit) de X par

$$[X, X]_n = \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})^2 = \sum_{k=1}^n \Delta X_k^2, \quad \text{pour } n \geqslant 1, \qquad \text{et} \qquad [X, X]_0 = 0.$$

Que peut-on dire du processus $X^2 - [X, X]$?

(iii) On définit la variation quadratique prévisible (crochet oblique) de X par

$$\langle X, X\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - X_{k-1})^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\Delta X_k^2 \,|\, \mathcal{F}_{k-1}], \quad \text{pour } n \geqslant 1,$$

et $\langle X, X\rangle_0 = 0$. Que peut-on dire du processus $X^2 - \langle X, X\rangle$?

(iv) Exprimer les variations quadratiques d'une transformée de Burkhölder.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{O}}$ 3, PROCESSUS DE MARKOV, GÉNÉRALITÉS

Exercice 1. — (i) Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

(ii) Montrer que la matrice d'une permutation est bistochastique.

Exercice 2. — Considérons 2 urnes contenant au total n boules. Une boule est choisie au hasard et transvasée dans l'autre urne. Décrire ce mécanisme à l'aide d'une matrice stochastique en s'intéressant, par exemple, au nombre de boules contenues dans l'une des deux urnes.

Exercice 3. — Soient $X_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, et on considère ce processus dans sa filtration naturelle.

(i) Montrer que le processus est markovien.

(ii) Lorsque les ξ_n sont identiquement distribuées, montrer que le processus est homogène et déterminer son semi-groupe de transition.

Exercice 4. — Soit X un processus markovien admettant une fonction de transition

$$(P_{s,t})_{0 \leqslant s \leqslant t}$$

a priori inhomogène. Que dire du processus espace-temps $(X_t, t)_{t \geqslant 0}$?

Exercice 5. — Nous considérons deux noyaux P et Q sur $\mathbb{R}^n$ homogènes en espace, c'est-à-dire qu'il existe deux mesures de probabilité μ et ν sur $\mathbb{R}^n$ telles que $P(x, \mathrm{d}y) = \mu(\mathrm{d}y - x)$ et $Q(x, \mathrm{d}y) = \nu(\mathrm{d}y - x)$.

(i) Exprimer la mesure de probabilité $(PQ)(0, \mathrm{d}z)$ en fonction de μ et ν.

(ii) Reprendre le calcul pour $(PQ)(x, \mathrm{d}z)$ en fonction de μ et ν avec $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Constater le lien avec les sommes de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque. — L'espace d'états dans l'exercice précédent pourrait être aussi bien $\mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{N}^n$, etc.

Exercice 6 (semi-groupe de Poisson). — Soit $P_t(x, \mathrm{d}y) = \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \delta_{\{x+n\}}(\mathrm{d}y)$ où $\lambda > 0$ est une constante, $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que pour chaque t, P_t est un noyau de probabilité (ou markovien) sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $(P_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe de transition sur $\mathbb{R}$.

Remarque. — Dans l'exercice précédent, nous avons pris pour espace d'états $\mathbb{R}$. Généralement, on considère plutôt $\mathbb{N}$ voir $\mathbb{Z}$.

Exercice 7 (semi-groupe brownien). — Soit $P_t(x, \mathrm{d}y) = \exp(-(y-x)^2/2t)/\sqrt{2\pi t}\, \mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}$ pour $t > 0$, et $P_0(x, \mathrm{d}y) = \delta_{\{x\}}(\mathrm{d}y)$.

(i) Montrer que pour chaque t, P_t est un noyau de probabilité (ou markovien) sur $\mathbb{R}$.

(ii) Montrer que $(P_t)_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe de transition sur $\mathbb{R}$.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

2M12–Processus à temps discret
MMAS 1, Année 2009–10

CONTRÔLE, PROCESSUS À TEMPS DISCRET, 5 MARS 2009, 9H00–12H00, IFMI07

Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice est interdit. Les différents exercices sont indépendants. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation des copies.

Exercice 1 (question de cours). — On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soient X un processus adapté défini sur cet espace et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et T un temps d'arrêt de la filtration.

(i) Définir $\mathcal{F}_T$ et montrer qu'il s'agit d'une tribu.

(ii) Supposons que T est fini. Définir X_T et montrer que c'est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable.

(iii) Étendre le résultat précédent lorsque T n'est pas nécessairement fini (ajout d'un cimetière ou point à l'infini).

Exercice 2. — Soient $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées admettant une fonction génératrice $G(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{u\xi_n}] \in \,]0, \infty[$ pour au moins un réel $u \neq 0$. Montrer que

$$X_0 = 1, \qquad X_n = G(u)^{-n}\,\mathrm{e}^{u(\xi_1+\cdots+\xi_n)}, \quad n \geqslant 1,$$

définit une martingale.

Exercice 3. — On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel est définie une suite $(\Theta_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur le cercle unité $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$. On définit un processus $Z = (Z_n)_{n\geqslant 0}$ par une valeur initiale $Z_0 = (x_0, y_0)$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$\Delta Z_n = Z_n - Z_{n-1} = \begin{cases} (-1, \tan\Theta_n) & \text{si } \Theta_n \in \,]\pi/2, 3\pi/2], \\ (1, \tan\Theta_n) & \text{si } \Theta_n \in \,]-\pi/2, \pi/2]. \end{cases}$$

(i) Constater que le processus $(Z_n = (X_n, Y_n))_{n\geqslant 0}$ est à accroissements indépendants et qu'il est donc markovien. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, ΔX_n et ΔY_n sont indépendants. En déduire que les processus $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ et $Y = (Y_n)_{n\geqslant 0}$ sont indépendants.

(ii) Déterminer la loi des accroissements ΔX_n et ΔY_n. Nommer ces lois.

(iii) Justifier que le processus Z est un processus de Markov homogène et préciser son semi-groupe de transition.

(iv) Le processus Z vérifie-t-il la loi forte des grands nombres ? Pourquoi ? Que peut-on dire de plus (question libre) ?

Pour l'exercice suivant, les raisonnements par classes monotones sont fondamentaux. On trouvera en fin de sujet quelques rappels à ce propos.

Exercice 4. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, F une variable aléatoire réelle, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux sous-tribus de $\mathcal{A}$. On suppose de plus que $\sigma(F, \mathcal{B})$ est une tribu indépendante de $\mathcal{C}$.

(i) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$, on a

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[F \,|\, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}] \times \mathbb{1}_{B\cap C}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[F \,|\, \mathcal{B}] \times \mathbb{1}_{B\cap C}\big].$$

où on rappelle que $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

(ii) Montrer que $\mathcal{M} = \{D \in \mathcal{A} : \mathbb{E}[\mathbb{E}[F \mid \mathcal{B} \vee \mathcal{C}] \times \mathbb{1}_D] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[F \mid \mathcal{B}] \times \mathbb{1}_D]\}$ est une classe monotone contenant les $B \cap C$, $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$.

(iii) Conclure que $\mathbb{E}[F \mid \mathcal{B} \vee \mathcal{C}] = \mathbb{E}[F \mid \mathcal{B}]$.

Nous considérons deux processus X et Y indépendants le premier à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$, l'autre à valeurs dans $(G, \mathcal{G})$, markovien l'un et l'autre dans leurs filtrations naturelle respectives $\mathcal{F}^X$ et $\mathcal{F}^Y$. Préciser l'ensemble des temps $(\mathbb{T}, \leqslant)$ n'est pas important ; on pourra penser à $(\mathbb{N}, \leqslant)$ si cela peut être rassurant.

(iv) Montrer que $Z = (X, Y)$ est un processus markovien à valeurs dans $(E \times G, \mathcal{E} \otimes \mathcal{G})$ dans sa filtration naturelle en se servant des questions précédentes et des théorèmes de classes monotones.

(v) Supposons de X et Y admettent respectivement des fonctions de transition $(P_{s,t})_{s \leqslant t}$ et $(Q_{s,t})_{s \leqslant t}$. Le processus Z admet-il une fonction de transition ? L'exprimer en termes de produits de mesures.

(vi) Supposons que E et G soient deux ensembles finis munis de leurs tribus discrètes, et, pour simplifier, que les fonctions de transition soient homogènes et que le temps soit $\mathbb{N}$. Exprimer les coefficients de la matrice de transition R de Z en fonction des coefficients des matrices de transition P et Q de X et Y respectivement. L'expression obtenue correspond à une opération algébrique connue. Quelle est-t-elle ?

Rappels

Définition. — Une classe $\mathcal{M}$ de partie d'un ensemble Ω est une classe monotone si

(i) $\Omega \in \mathcal{M}$;

(ii) si $A, B \in \mathcal{M}$ et $B \subset A$, alors $A \backslash B = A \cap B^c \in \mathcal{M}$;

(iii) $\mathcal{M}$ est stable est stable par réunion monotone croissante.

Pour $\mathcal{E}$ ensemble de parties de Ω, on note $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$.

Théorème. — *Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de Ω, stable par intersection finie. Alors, on a $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.*

Théorème. — *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel de fonctions bornées de Ω à valeurs danss $\mathbb{R}$, contenant les fonctions constantes, et stable par convergence monotone bornée. Si $\mathcal{C} \subset H$ est stable par mulitiplication et contient les fonctions constantes, alors $\mathcal{H}$ contient toutes les fonctions bornées mesurables par rapport à $\sigma(\mathcal{C})$.*

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{o}}$ 4,
CHAÎNES DE MARKOV À ESPACE D'ÉTATS DISCRET

EXERCICE 1. — (i) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère une sous tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ engendrée par une partition mesurable, au plus dénombrable de Ω que nous noterons $(B_n)_n$. Pour $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ variable aléatoire positive ou intégrable, donner une expression de $\mathbb{E}[X \,|\, \mathcal{B}]$ à l'aide de la partition considérée.

(ii) Soit X un processus d'espace d'états $E = \{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ au plus dénombrable. Montrer que X est markovien dans sa filtration naturelle si et seulement si : pour tous $n \geqslant 0$, $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$,

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n\},$$

lorsque ces probabilités conditionnelles sont définies.

(iii) Réecrire la propriété précédente de sorte à éviter les problèmes de définition des probabilités conditionnelles.

(iv) Démontrer qu'un processus markovien indexé par $\mathbb{N}$ d'espace d'états au plus dénombrable vérifie la propriété de Markov forte.

EXERCICE 2. — (i) Soient A, B et $C \in \mathcal{A}$ tels que $\mathbb{P}(B \cap C) > 0$. Montrer que A et B sont indépendants conditionnellement à C si et seulement si

$$\mathbb{P}(A \,|\, B \cap C) = \mathbb{P}(A \,|\, C).$$

On pourra noter au passage qu'ici on a nécessairement $\mathbb{P}(C) > 0$.

(ii) Soient E, F et G des ensembles au plus dénombrables munis de leurs tribus discrètes, et $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to E$, $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to F$ et $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to G$ trois variables aléatoires (discrètes, donc).

Montrer que X et Y sont indépendantes conditionnellement à Z si et seulement si, pour tout $x \in E$, $y \in F$, $z \in G$ tel que $\mathbb{P}\{Z = z\} > 0$,

$$\mathbb{P}\{X = x, Y = y \,|\, Z = z\} = \mathbb{P}\{X = x \,|\, Z = z\} \times \mathbb{P}\{Y = y \,|\, Z = z\}.$$

EXERCICE 3. — Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans I. Pour tout $n \geqslant 0$, soient $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_0, \ldots, X_n\}$ et $\mathcal{G}_n = \sigma\{X_n, X_{n+1}, \ldots\}$ les tribus respectivement du passé et du futur à l'instant n.

Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov si et seulement si pour tout $n \geqslant 0$, $i \in I$, les tribus $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{G}_n$ sont indépendantes conditionnellement à $\{X_n = i\}$.

EXERCICE 4. — On considère une chaîne de Markov à 3 états $\{1, 2, 3\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Trouver une formule générale pour la suite $(p_{1,1}^{(n)})_{n\geqslant 0}$ (*indication :* on pourra se servir des valeurs propres de P).

Exercice 5. — Soient $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov (λ, P) et k entier strictement positif. Montrer que si on pose $Y_n = X_{kn}$, pour tout $n \geqslant 0$, alors la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov (λ, P^k).

Exercice 6. — *Marches aléatoires simples dans $\mathbb{Z}$.* — On considère pour espace d'états $I = \mathbb{Z}$ et $p \in [0,1]$ un réel. En posant $q = 1-p$, on définit une matrice de transition P par

$$p_{i,j} = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ q & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$p_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} \binom{n}{(n+j-i)/2} p^{(n+j-i)/2} q^{(n-j-i)/2} & \text{si } n+j-i \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \text{où } \binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!\,(n-k)\,!}.$$

Exercice 7. — Dans le cas d'une chaîne de Markov à deux états, discuter en fonction de α et β des relations entre les deux points, des classes communiquantes, des classes fermées. Faire de même dans le cas de l'urne d'Ehrenfest pour $N \in \mathbb{N}$ quelconque.

Exercice 8. — Identifier les classes communiquantes, en précisant lesquelles sont fermées, associées à

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. — Montrer que toute matrice de transition sur un espace d'état fini a au moins une classe fermée. Trouver un exemple de matrice de transition sans classe fermée.

Exercice 10. — Le jeu « Snakes & Ladders »

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{o}}$ 5, CHAÎNES DE MARKOV À ESPACE D'ÉTATS DISCRET (SUITE)

Exercice 1 (où le travail est de comprendre ce qu'il se passe). — Si $X = (X_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ associée à un paramètre $p \in [0,1]$ et $q = 1-p \in [0,1]$, le calcul explicite des probabilités de transition montre que les suites $\big(P^n(x,y)\big)_{n\geqslant 0}$ tendent vers 0 pour tous x, $y \in \mathbb{Z}$. Le vecteur $(0)_{x\in\mathbb{Z}}$ est invariant par la matrice de transition de la marche mais n'est bien sûr pas une mesure de probabilité.

Si $p \neq 1/2$, la marche est asymétrique. En supposant que pour tout $n \geqslant 0$, on a $X_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$, où les $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ sont des variables aléatoires indépendantes toutes de loi $q\delta_{\{-1\}} + p\delta_{\{1\}}$ et donc d'espérance $\mathbb{E}[\xi_1] = -q + p = 2p-1$, on a d'après la loi forte des grands nombres

$$\frac{X_n}{n} = \frac{X_0}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \longrightarrow 0 + \mathbb{E}[\xi_1] = 2p-1 \qquad \text{presque sûrement quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Puisque cette limite est différente de 0, nous obtenons un équivalent de la suite aléatoire $(X_n)_{n\geqslant 0}$:

$$X_n \sim n \times (2p-1) \qquad \text{presque sûrement quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

Ceci montre que, pour toute loi (de probabilité) initiale, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $\pm\infty$ presque sûrement, et donc qu'il y a convergence en loi vers $\delta_{\{\pm\infty\}}$ qui n'est pas une mesure de probabilité sur $\mathbb{Z}$ ($\pm\infty = +\infty$ si $p > 1/2$ et $\pm\infty = -\infty$ si $p < 1/2$).

Pour $p = 1/2$, la situation est plus délicate.

Remarquons que dans tous les cas, la mesure uniforme $(1)_{x\in\mathbb{Z}}$ — ainsi que ses multiples — est invariante, mais ce n'est pas une mesure de probabililité.

Exercice 2. — Sur $\mathcal{R}$, la relation « mener à » est une relation d'équivalence.

Exercice 3. — Soit F une classe fermée, en particulier si F est récurrente, associée à une matrice de transition P. Montrer que la sous-matrice de P obtenue en n'en conservant que les coefficients indexés par $F \times F$ est une matrice stochastique et qu'elle est irréductible.

Exercice 4. — Considérons l'urne d'Ehrenfest. Montrer que la mesure de probabilité π définie par

$$\pi\{x\} = \binom{N}{x} \times \frac{1}{2^N}, \qquad x \in \{0,1,\ldots,N\}$$

est l'unique mesure de probabilité invariante.

Exercice 5. — Nous considérons la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ représentée par la figure suivante :

c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $P(x, x+1) = p_x$, $P(x, 0) = q_x = 1 - p_x$, $p_x \in [0,1]$, les autres coefficients étant nuls. Sous l'hypothèse de la convergence du produit infini $\prod_{i=0}^{\infty} p_x$, montrer que cette matrice de transition n'a pas de mesure invariante (autre que nulle).

Exercice 6. — Soit P une matrice de transition sur un espace d'états fini E. Montrer qu'une mesure de probabilité π est invariante si et seulement si

$$\pi \times \left(\mathrm{Id} - P + \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right) = (1, \dots, 1).$$

En déduire que si P est irréductible, alors

$$M = \mathrm{Id} - P + \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Remarque. — Cet exercice montre comment utiliser des méthodes matricielles pour déterminer la probabilité invariante d'une matrice de transition irréductible. Dans un cadre plus général, toujours avec E fini, il faudrait considérer chacune des sous-matrices associées à chaques classes récurrentes.

Exercice 7. — Montrer qu'un état $x \in E$ est apériodique si et seulement si

$$n_x = \mathrm{pgcd}\big\{ n \geqslant 0 : P^n(x, x) > 0 \big\} = 1,$$

où pgcd est l'opérateur « plus grand commun diviseur ». (Lorsque n_x est en entier supérieur ou égal à 2, l'état x est dit périodique de période n_x.)

Exercice 8 (théorème de renouvellement). — Soit $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ indépendantes et de même loi. On suppose que

$$\mathrm{pgcd}\big\{ n \geqslant 1 : \mathbb{P}\{Y_1 = n\} > 0 \big\} = 1,$$

et on pose $\mu = \mathbb{E}[Y_1] \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Montrer que le processus $(X_n)_{n \geqslant 0}$ défini par $X_0 = 0$ et

$$X_n = \inf\{ m \geqslant n : \exists\, k \geqslant 0,\, m = Y_1 + \dots + Y_k \} - n, \qquad n \geqslant 1,$$

est une chaîne de Markov de matrice de transition P vérifiant $P(0,x) = \mathbb{P}\{Y_1 = x+1\}$, $x \geqslant 0$, et $P(x, x-1) = 1$, $i \geqslant 1$, les autres coefficients étant nuls.

On pourra poser $S_0 = 0$ et $S_k = Y_1 + \cdots + Y_k$ pour $k \geqslant 1$, et utiliser le fait que, si $S_{k-1} < n \leqslant S_k$, alors $X_n = S_k - n = Y_k - (n - S_{k-1})$.

Déterminer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 0\}$ et en déduire que

$$\mathbb{P}\{\exists\, k \geqslant 0 : n = Y_1 + \cdots + Y_k\} \longrightarrow \frac{1}{\mu} \qquad \text{quand } n \text{ tend vers l'infini.}$$

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{O}}$ 6, CHAÎNES DE MARKOV À ESPACE D'ÉTATS DISCRET (FIN ?)

EXERCICE 1. — Considérons un graphe connexe fini $(E, \mathcal{R})$ (la relation $\mathcal{R}$ est nulle part réflexive). Soit P définie par

$$P(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{v\{x\}+1} & \text{si } x \mathcal{R} y \text{ ou } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que P est une matrice stochastique irréductible, récurrente et apériodique. Déterminer sa mesure de probabilité invariante.

EXERCICE 2. — Soient l'espace d'états $E = \{0, 1, \ldots, M\}$, $p = 1 - q \in]0, 1[$, et la matrice de transition P définie par

$$P(0,0) = q, \qquad P(x+1, x) = p, \qquad 0 \leqslant i \leqslant M-1\,;$$
$$P(x, x-1) = q, \quad 1 \leqslant x \leqslant M\,; \quad P(M,M) = p,$$

les autres coefficients étant nuls. Montrer que la mesure $\mu = ((p/q)^x)_{0 \leqslant x \leqslant M}$ est réversible. En déduire une mesure de probabilité réversible.

EXAMEN, PROCESSUS À TEMPS DISCRET, IFMI06

11 mai 2009, 14h–18h
Durée : 4 heures

Tout document est interdit. Le soin de la rédaction, de l'explication et la justification des raisonnements sera pris en compte pour l'évaluation des copies. Les différents exercices sont indépendants.

Exercice 1 (cours). — Nous considérons un espace d'états fini E et une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P sur E.

(i) Définir ce qu'est une classe fermée. Prouver dans ce cadre l'existence d'une telle classe.

(ii) Existe-t-il une mesure invariante ? Si oui, la ou les descrire.

(iii) Quelle propriétés d'ergodicité peut-on attendre ?

Exercice 2. — Pour chacune des situations suivantes, préciser quand la matrice de transition est irréductible et si elle admet une mesure réversible qu'on identifiera.

(i) $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$.

(ii) $P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) $I = \{1, \ldots, N\}$ et $p_{i,j} = 0$ si $|i-j| \geqslant 2$.

(iv) $I = \{0, 1, 2 \ldots\}$, $p_{0,1} = 1$, $p_{i,i+1} = p$, $p_{i,i-1} = 1-p$ pour $i \geqslant 1$.

(v) $p_{i,j} = p_{j,i}$ pour tous i, $j \in I$.

Exercice 3. — Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov irréductible admettant une mesure de probabilité invariante π. Soient $J \subset I$ et $(Y_m)_{m\geqslant 0}$ la chaîne de Markov obtenue en observant $(X_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque celle-ci est dans J. Montrer que $(Y_m)_{m\geqslant 0}$ est récurrente positive et déterminer sa mesure de probabilité invariante.

Exercice 4. — Soit $(U_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}\{U_n = 0\} = \mathbb{P}\{U_n = 1\} = 1/2$. On définit une suite d'entiers aléatoires positifs $(F_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0$,

$$F_{n+2} = \begin{cases} F_{n+1} + F_n & \text{si } U_n = 0, \\ |F_{n+1} - F_n| & \text{si } U_n = 1. \end{cases}$$

(i) La suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle une chaîne de Markov ?

(ii) Montrer que la suite $X_n = (F_n, F_{n+1})$, $n \geqslant 0$, est une chaîne de Markov.

(iii) Déterminer à l'aide de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ la probabilité que $(F_n)_{n\geqslant 0}$ atteigne 3 juste avant d'atteindre 0.

(iv) En utilisant la propriété forte de Markov, montrer que la probabilité d'atteindre $(1,1)$ en étant parti de $(1,2)$ est $(3-\sqrt{5})/2$.

(v) En déduire que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est transiente.

(vi) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers ∞ presque sûrement.

EXERCICE 5. — Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une chaîne de Markov sur $\{0, 1, 2, \ldots\}$ dont les probabilités de transition sont données par

$$p_{0,1} = 1, \qquad p_{i,i+1} + p_{i,i-1} = 1, \qquad p_{i,i+1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^2 p_{i,i-1}, \quad i \geqslant 1.$$

Montrer que si $X_0 = 0$ alors la probabilité que $X_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 1$ est égale à $6/\pi^2$.

EXAMEN, PROCESSUS À TEMPS DISCRET
SECONDE SESSION

17 juin 2009, 14h–18h
Durée : 4 heures

Tout document est interdit. Le soin de la rédaction, de l'explication et la justification des raisonnements sera pris en compte pour l'évaluation des copies.

Exercice 1. — Soient $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées admettant une fonction génératrice $G(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{u\xi_n}] \in]0, \infty[$ pour au moins un réel $u \neq 0$. Montrer que

$$X_0 = 1, \qquad X_n = G(u)^{-n}\,\mathrm{e}^{u(\xi_1+\cdots+\xi_n)}, \quad n \geqslant 1,$$

définit une martingale.

Exercice 2 *(identité de Wald).* — On considère sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $n \in \mathbb{N}^*$, intégrable de même espérance $\mathbb{E}[X_n] = \mu$. La filtration considérée est celle du processus X, avec $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ la tribu triviale. Dans cette filtration, nous considérons un temps d'arrêt $N : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ qui est supposé d'espérance finie ($\mathbb{E}[N] < \infty$).

Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} X_n\right] = \mathbb{E}[N] \times \mu.$$

(On pourra commencer par considérer les X_n de signe constant et égal, puis passer au cas général.)

Exercice 3 (contrôle des naissances). — Soit $X = (X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi de bernoulli symétrique $\mathcal{B}(1, 1/2)$. Les valeurs obtenues correspondent à la naissance au n-ième essai d'un garçon ou d'une fille, et on suppose qu'il n'y a pas de naissance multiple. Les parents se fixent certains objectifs ce qui conduit à temps d'arrêt N qui est le nombre d'enfants obtenus.

D'après l'identité de Wald, quels que soient les objectifs choisis par les parents, la moyenne de garçons (ou de filles) obtenus est $\mathbb{E}[N]/2$, et donc, ne dépend que de l'espérance du temps d'arrêt N.

(i) La famille décide d'arrêter de procréer dès qu'elle a obtenu deux garçons consécutivement. Évaluer le nombre moyen d'enfants et de garçons dans la famille.

(ii) La famille décide d'arrêter de procréer dès qu'elle a obtenu un garçon succédant immédiatement à une fille. Évaluer le nombre moyen d'enfants et de garçons dans la famille.

Exercice 4. — Nous considérons la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ représentée par la figure suivante :

c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $P(x, x+1) = p_x$, $P(x, 0) = q_x = 1 - p_x$, $p_x \in [0, 1]$, les autres coefficients étant nuls. Sous l'hypothèse de la convergence du produit infini $\prod_{i=0}^{\infty} p_x$, montrer que cette matrice de transition n'a pas de mesure invariante autre que nulle. (L'achitecture du raisonnement sera détaillée pour la notation.)