FEUILLE N° 1. — FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES ET APPLICATIONS

Exercice 1 (*fonctions caractéristiques de lois classiques*). — Soit X une variable aléatoire réelle de loi P_X et soit φ_X la fonction caractéristique de X,

$$\varphi_X(\theta) = \widehat{P}_X(\theta) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\big], \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Calculer les fonctions caractéristiques pour les lois classiques μ suivantes :

(i) loi uniforme $\mathcal{U}(1,\dots,n)$, $\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_k$ sur $\{1,\dots,n\}$.

(ii) loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$, $\mu = (1-p)\,\delta_0 + p\,\delta_1$ de paramètre $p \in [0,1]$.

(iii) loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $\mu = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k\,(1-p)^{n-k}\,\delta_k$ de paramètres $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(iv) loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mu = \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,\delta_n$ de paramètre $\lambda > 0$.

(v) loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, $\mu = \sum_{k=1}^{\infty}p\,(1-p)^{k-1}\,\delta_k$ de paramètre $p \in \,]0,1]$.

(vi) loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$, $\mu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)\,\mathrm{d}x$ sur $[a,b]$ avec $a < b$.

(vii) loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\mu(\mathrm{d}x) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)\,\mathrm{d}x$ de paramètre $\lambda > 0$.

(viii) loi de Cauchy $\mathcal{C}(a)$, $\mu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ de paramètre $a > 0$.

(ix) loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\mu(\mathrm{d}x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-(x-m)^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x$ de moyenne m et de variance $\sigma^2 > 0$.

(x) loi Gamma $\Gamma(a,p)$, $\mu(\mathrm{d}x) = \frac{p^a}{\Gamma(a)}\,\mathrm{e}^{-px}\,x^{a-1}\mathbb{1}_{\{x>0\}}(x)\,\mathrm{d}x$ de paramètres $a > 0$ et $p > 0$.

Correction. — (i) Soit $n \geqslant 1$ un entier. La fonction caractéristique de la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$ est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta/2}}{n}\,\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \text{ si } \theta \neq 0,\ 1 \text{ si } \theta = 0.$$

Démonstration. — Si X est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$, on a pour $\theta \neq 1$

$$\begin{aligned}\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}X\theta}\big] &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n/2+1)\theta}}{n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta/2}}{n}\,\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\end{aligned}$$

et bien sûr $\varphi_X(0) = 1$. □

(ii) Soit $p \in [0,1]$. La fonction caractéristique de la loi de Bernoulli de paramètre p est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 - p.$$

Démonstration. — Si X est une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre p, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_X(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}0\theta}\,\mathbb{P}\{X=0\} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}1\theta}\,\mathbb{P}\{X=1\} = 1 \times (1-p) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times p = p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 - p$.

(iii) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. La fonction caractéristique de la loi binomiale de paramètres n et p est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto (p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 - p)^n.$$

Démonstration. — Si X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p, pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\varphi_X(\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\, \mathbb{P}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^k (1-p)^{n-k} = (p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 - p)^n.\end{aligned}$$

Une autre façon de le voir est de considérer $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi la loi de Bernoulli de paramètre p. Alors la loi de $X = X_1 + \cdots + X_n$ est la loi binomiale de paramètres n et p et on a

$$\varphi_X(\theta) = \varphi_{X_1}(\theta) \times \cdots \times \varphi_{X_n}(\theta) = (p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 - p) \times \cdots \times (p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 - p) = (p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + 1 - p)^n.$$

La fonction caractéristique ne dépendant que de la loi de la variable considérée, on a le résultat (même si une telle décomposition de X n'est pas toujours possible).

(iv) Soit $\lambda \geqslant 0$. La fonction caractéristique de la loi de Poisson de paramètre λ est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \exp\bigl(\lambda \times (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1)\bigr).$$

Démonstration. — C'est du calcul élémentaire. Si X est une variable aléatoire de loi la loi de Poisson de paramètre λ, on a

$$\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\bigr] = \sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta n}\, \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n\,!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\bigl(\lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)^n}{n\,!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \exp\bigl(\lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr) = \exp\bigl(\lambda \times (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1)\bigr),$$

comme annoncé. □

(v) Soit $p \in \,]0, 1]$. La fonction caractéristique de la loi géométrique de paramètre p est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - (1-p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}.$$

Démonstration. — Si X est une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p, on a

$$\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\bigr] = \sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta n} p(1-p)^{n-1} = p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \sum_{n\geqslant 1} \bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-p)\bigr)^{n-1} = \frac{p\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 - (1-p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

comme simple série géométrique dont la raison a pour module $|(1-p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1 - p < 1$.

(vi) Soit $a < b$. La fonction caractéristique de la loi uniforme sur $[a, b]$ a est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+a)\theta/2} \frac{\sin((b-a)\theta/2)}{(b-a)\theta/2} \text{ si } \theta \neq 0,\ 1 \text{ si } \theta = 0.$$

Démonstration. — Commençons par le cas $a = 0$ et $b = 1$, et considérons U une variable de loi uniforme sur $[0, 1]$. On a alors pour $\theta \neq 0$

$$\varphi_U(\theta) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}u\theta}\, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - 1}{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}}{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}$$

et $\varphi_U(0) = 1$. Soient $a < b$, alors $X = (b-a)U + a$ est de loi uniforme sur $[a, b]$ et on a pour $\theta \neq 0$

$$\begin{aligned}\varphi_X(\theta) &= \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}X\theta}\bigr] = \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}((b-a)U+a)\theta}\bigr] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\theta}\, \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}U(b-a)\theta}\bigr] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\theta} \varphi_U((b-a)\theta) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\theta}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(b-a)\theta/2} \frac{\sin((b-a)\theta/2)}{(b-a)\theta/2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(b+a)\theta/2} \frac{\sin((b-a)\theta/2)}{(b-a)\theta/2}\end{aligned}$$

et évidemment $\varphi_X(0) = 1$.

(vii) Soit $\lambda > 0$. La fonction caractéristique de la loi exponentielle de paramètre λ est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta}\,.$$

Démonstration. — C'est un calcul immédiat. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(\theta) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \lambda}\big[\mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}\theta)x}\big]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta}$$

puisque $|\,\mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}\theta)x}| = \mathrm{e}^{-\lambda x}$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

(viii) Soit $a \geqslant 0$. La fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre a est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \exp\big(a|\theta|\big).$$

Démonstration. — Prenons $a = 1$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Nous allons calculer

$$\varphi(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\pi} = \lim_{r\to\infty}\int_r^r \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}}{1+x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\pi} = \lim_{r\to\infty} I(r)$$

à l'aide d'outils d'analyse complexe, en particulier le théorème des résidus. Nous avons

$$f_\theta(z) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}}{1+z^2} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}}{\pi}\Big(\frac{\mathrm{i}/2}{z+i} - \frac{\mathrm{i}/2}{z-i}\Big) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}}{2\pi}\Big(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i}\Big)$$

qui est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\}$, de pôles $\{-\mathrm{i},\mathrm{i}\}$ et de résidus

$$\operatorname{Res}(f_\theta, -\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\times(-\mathrm{i})}}{2\pi} = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\theta}}{2\pi}\,, \qquad \operatorname{Res}(f_\theta, \mathrm{i}) = -\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta\times\mathrm{i}}}{2\pi} = -\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\theta}}{2\pi}\,.$$

Pour $r > 1$, considérons

1m02td.1
$$\begin{cases} I_+(r) = \displaystyle\int_{\mathcal{C}_+} f_\theta(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\operatorname{Res}(f_\theta,\mathrm{i}) = \mathrm{e}^{-\theta}, \\ I_-(r) = \displaystyle\int_{\mathcal{C}_-} f_\theta(z)\,\mathrm{d}z = 2\mathrm{i}\pi\operatorname{Res}(f_\theta,-\mathrm{i}) = -\,\mathrm{e}^{\theta}. \end{cases}$$

Par passage en coordonnées polaires, on a

$$\mathrm{e}^{-\theta} = I_+(r) = I(r) + \int_0^\pi f_\theta(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) \times r\,\mathrm{d}\alpha.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{e}^{-\theta} - I(r)\big| &\leqslant \int_0^\pi \big|f_\theta(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})\big| \times r\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^\pi \frac{\exp(-\theta r\sin\alpha)}{|1 + r^2\exp(2\mathrm{i}\alpha)|} \times r\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^\pi \frac{\exp(-\theta r\sin\alpha)}{|1/r + r\exp(2\mathrm{i}\alpha)|}\,\mathrm{d}\alpha \leqslant \int_0^\pi \frac{\exp(-\theta r\sin\alpha)}{r - 1/r}\,\mathrm{d}\alpha.\end{aligned}$$

Comme pour $\alpha \in [0,\pi]$, $\sin\alpha \geqslant 0$, et ainsi, si $\theta \geqslant 0$, $\exp(-\theta r\sin\alpha) \leqslant 1$. Pour $\theta \geqslant 0$, on a alors

$$\big|\mathrm{e}^{-\theta} - I(r)\big| \leqslant \frac{\pi}{r - 1/r} \longrightarrow 0 \qquad \text{quand } r \to \infty,$$

et ainsi $\varphi(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta}$ pour $\theta \geqslant 0$. Lorsque $\theta \leqslant 0$, on peut considérer $|\mathrm{e}^{\theta} - I(r)| = |I(r) + I_-(r)|$ et montrer comme précédemment que ça tend vers 0 quand r tend vers l'infini et qu'ainsi $\varphi(\theta) = \mathrm{e}^{\theta}$ pour $\theta \leqslant 0$, ou simplement remarquer que puisque la densité de la loi de Cauchy est paire, alors la fonction caractéristique est elle aussi paire, et donc, de $\varphi(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta}$ pour $\theta \geqslant 0$, en déduire que $\varphi(\theta) = \mathrm{e}^{-|\theta|}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Pour une loi de Cauchy de paramètre $a > 0$, nous savons que si X est de loi $\mathcal{C}(a)$, alors X/a est de loi $\mathcal{C}(1)$. Ainsi $\varphi_a(\theta) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\theta(X/a)}] = \varphi(a\theta) = \mathrm{e}^{-a|\theta|}$. □

(ix) Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. La fonction caractéristique de la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \exp\bigl(\mathrm{i}m\theta - \sigma^2\theta^2/2\bigr).$$

Démonstration. — Soit X une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Nous savons alors que $Z = (X - m)/\sigma$ est une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_X(\theta) &= \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\bigr] = \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(X-m)} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta m}\bigr] = \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\theta(X-m)/\sigma} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta m}\bigr] \\ &= \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\theta(X-m)/\sigma}\bigr] \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta m} = \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sigma\theta Z}\bigr] \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta m} = \varphi_Z(\sigma\theta) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta m}.\end{aligned}$$

Il nous suffit donc de calculer la fonction caractéristique φ_Z de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous avons

$$\varphi_Z(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Démontrer que φ_Z est de classe C^1 et que sa fonction dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme est classique, nous nous en dispensons. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\varphi_Z'(\theta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\pi}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta}\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\bigr)\,\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial\theta}\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}\bigr)\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\pi}}\,.\end{aligned}$$

Puis nous intégrons par parties en la variable z en notant que $(\mathrm{e}^{-z^2/2})' = -z\,\mathrm{e}^{-z^2/2}$

$$\begin{aligned}\varphi_Z'(\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\mathrm{e}^{-z^2/2})\,\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\pi}} = \left[-\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{i}^2\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\pi}} = 0 - \theta\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta z}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2\pi}} = -\theta \times \varphi_Z(\theta).\end{aligned}$$

Ainsi la fonction φ_Z vérifie l'équation différentielle $\varphi' = f(\theta, \varphi) = -\theta \times \varphi$ avec f continue, localement lipschitzienne en la deuxième variable (elle est en fait C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) et la condition initiale $\varphi_Z(0) = 1$. D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, il y a unicité de la solution maximale associée à ce problème de Cauchy. Comme la fonction $\theta \mapsto \mathrm{e}^{-\theta^2/2}$ vérifie aussi ces conditions, par unicité, on a $\varphi_Z(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta^2/2}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. La formule annoncée dans le lemme s'en déduit immédiatement : pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi_X(\theta) &= \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\bigr] = \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(X-m)}\bigr] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \times \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(X-m)}\bigr] \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \times \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma\theta)(X-m)/\sigma}\bigr] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \times \mathbb{E}\bigl[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\sigma\theta)Z}\bigr] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} \times \varphi_Z(\sigma\theta) = \exp\bigl(\mathrm{i}m\theta - \sigma^2\theta^2/2\bigr),\end{aligned}$$

ce qui était annoncé. □

(x) Soient a et λ deux réels strictement positifs. La fonction caractéristique de la loi Gamma de paramètres (a, λ) est

$$\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \exp\Bigl(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta}\Bigr)^a.$$

Démonstration. — Soient $a > 0$ et $\lambda > 0$. Posons

$$\varphi(\theta) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}\,\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\,x^{a-1}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty C\,x^{a-1}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta-\lambda)x}\,\mathrm{d}x.$$

Cette fonction est de classe C^1 et on peut dériver sous le signe somme

$$\varphi'(\theta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_0^\infty C\,x^{a-1}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta-\lambda)x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty C\,\frac{\partial}{\partial\theta}\bigl(x^{a-1}\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta-\lambda)x}\bigr)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{i}C\,x^a\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta-\lambda)x}\,\mathrm{d}x$$

Puis, en intégrant par parties,

$$\varphi'(\theta) = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}\theta - \lambda} \left[C\, x^a\, \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta-\lambda)x}\right]_0^\infty - \frac{\mathrm{i}a}{\mathrm{i}\theta - \lambda} \int_0^\infty \mathrm{i}C\, x^{a-1}\, \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta-\lambda)x}\big)\,\mathrm{d}x = 0 + \frac{\mathrm{i}a}{\lambda - \mathrm{i}\theta}\,\varphi(\theta).$$

Non rigoureusement,

$$\frac{\varphi'(\theta)}{\varphi(\theta)} = -a\frac{-\mathrm{i}}{\lambda - \mathrm{i}\theta} \quad\Longrightarrow\quad \ln\big(\varphi(\theta)\big) = -a\ln(\lambda - \mathrm{i}\theta) + \mathrm{Cte} \quad\Longrightarrow\quad \varphi(\theta) = \mathrm{Cte} \times (\lambda - \mathrm{i}\theta)^{-a}$$

et puisque $\varphi(0) = 1 = \mathrm{Cte} \times \lambda^{-a}$, $\mathrm{Cte} = \lambda^a$, et on a

$$\varphi(\theta) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta}\Big)^a.$$

Plus rigoureusement, φ vérifie une équation différentielle du premier ordre $\varphi' = f(\theta, \varphi)$ avec f continue, localement lipschitzienne en la deuxième variable (elle est en fait C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et on peut noter que le facteur $\mathrm{i}a/(\lambda - \mathrm{i}\theta)$ est borné dans $\mathbb{C}$ pour $\lambda > 0$ fixé et $\theta \in \mathbb{R}$, elle est donc globalement lipschitzienne en la seconde variable) et la condition initiale $\varphi_Z(0) = 1$. D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, il y a unicité de la solution maximale associée à ce problème de Cauchy. Considérons la détermination principale du logarithme $\mathrm{Log} : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ et la fonction

$$\phi : \theta \in \mathbb{R} \longmapsto \Big(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta}\Big)^a = \exp\Big(a\,\mathrm{Log}\Big(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta}\Big)\Big) \in \mathbb{C}$$

qui est bien définie, dérivable, vérifiant l'équation différentielle qui nous occupe et satisfaisant $\phi(0) = 1$. Par unicité, on a donc $\varphi = \phi$.

Remarque. — Le calcul se fait à l'aide de simples intégrations par parties lorsque a est un entier strictement positif. Pour $a = 1$, on est en présence de la loi exponentielle de paramètre λ, et donc $\varphi_1(\theta) = \lambda/(\lambda - \mathrm{i}\theta)$. Pour $a \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\varphi_a(\theta) &= \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\, x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}\theta)x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\lambda^a}{(a-1)\,!}\, x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}\theta)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{\lambda^a}{-(\lambda - \mathrm{i}\theta)(a-1)\,!}\, x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}\theta)x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\lambda^a(a-1)}{(\lambda - \mathrm{i}\theta)(a-1)\,!}\, x^{a-2}\, \mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}\theta)x}\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta} \int_0^\infty \frac{\lambda^{a-1}}{(\lambda - \mathrm{i}\theta)(a-2)\,!}\, x^{a-2}\, \mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}\theta)x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta} \times \varphi_{a-1}(\theta)
\end{aligned}$$

D'où on a aisément

$$\varphi_a(\theta) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}\theta}\Big)^a.$$

On constate au passage que la somme de a variables aléatoires de même loi la loi exponentielle de paramètre λ est de loi Gamma de paramètres (a, λ), et que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de respectivement de lois Gamma de paramètres (a, λ) et (a', λ) a pour loi la loi Gamma de paramètres $(a + a', \lambda)$.

Exercice 2 (*vrai ou faux ?*). — Il existe des variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi, telles que $P_{X-Y} = \mathcal{U}([-1, 1])$.

Correction. — Faux. — Supposons qu'il existe des variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi, telles que $P_{X-Y} = \mathcal{U}([-1, 1])$. Leur fonction caractéristique commune φ vérifie

$$\varphi(\theta) \times \varphi(-\theta) = \varphi_X(\theta) \times \varphi_{-Y}(\theta) = \varphi_{X-Y}(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta} \quad \text{pour } \theta \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = 1.$$

Or $\varphi(-\theta) = \overline{\varphi(\theta)}$, donc ce qui précède s'écrit

$$|\varphi(\theta)|^2 = \frac{\sin(\theta)}{\theta} \quad \text{pour } \theta \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = 1,$$

ce qui est bien sûr impossible puisque le sinus cardinal prend parfois des valeurs strictement négatives.

Exercice 3 (*lois symétriques*). — (i) Soit X une variable aléatoire. Montrer que φ_X est à valeur réelles si et seulement si X a une loi symétrique, *i.e.* $P_X = P_{-X}$.

(ii) Montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi, alors $Z = X - Y$ a une loi symétrique.

Correction. — (i) Si X a une loi symétrique, on a

$$\varphi_X(\theta) = \varphi_{-X}(\theta) = \varphi_X(-\theta) = \overline{\varphi_X(\theta)},$$

et donc φ_X est à valeurs réelles. La réciproque est immédiate en se servant de ce qui précède puisqu'alors $\varphi_X = \varphi_{-X}$, et ainsi X et $-X$ ont même loi.

(ii) Supposons X et Y indépendantes et de même loi, alors

$$\varphi_{X-Y}(\theta) = \varphi_X(\theta) \times \varphi_{-Y}(\theta) = \varphi(\theta) \times \varphi(-\theta) = \varphi(\theta) \times \overline{\varphi(\theta)} = |\varphi(\theta)|^2$$

qui est réel (et même positif). D'après la question précédente, la loi de $X - Y$ est symétrique.

Remarque. — Soit μ la loi commune de X et de Y. Puisque X et Y sont indépendantes, les vecteurs aléatoires (X, Y) et (Y, X) ont tous les deux pour loi $\mu \otimes \mu$. Par conséquent, les images de leurs lois par l'application $(x, y) \mapsto x - y$ sont égales, ce qui signifie que $X - Y$ et $Y - X$ ont même loi, la loi de $X - Y$ est donc bien symétrique.

Exercice 4 (*loi triangulaire*). — Soit X une variable aléatoire réelle de densité $f_X(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Montrer que $\varphi_X(\theta) = 2(1 - \cos\theta)/\theta^2$, $\theta \neq 0$. (*Indication :* soient U et V des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[-1/2, 1/2]$; considérer $U + V$.)

Correction. — Si U et V sont indépendantes toutes deux de loi uniforme sur $[-1/2, 1/2]$, alors $X = U + V$ est de loi triangulaire de densité donnée par $f_X(x) = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. En effet, il suffit pour cela de calculer la fonction de répartition de X (se placer dans le carré $[-1/2, 1/2]^2$ muni de la mesure uniforme qui est la loi du couple (U, V), et déterminer les aires des domaines $\{(u, v) \in [-1/2, 1/2]^2 : u + v \leqslant x\}$) qui est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ (1 + x)^2/2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ (1 + (1 - x)^2)/2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

constater que cette fonction est continue, dérivable (par morceaux), et qu'elle est alors la primitive nulle en $-\infty$ de sa dérivée qui est continue (par morceaux)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 + x & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} = (1 - |x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

On a alors pour $\theta \neq 0$,

$$\varphi_X(\theta) = \varphi_U(\theta) \times \varphi_V(\theta) = \left(\frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta)/\theta^2.$$

Notons que le résultat ne dépend que de la loi de X et non de la possibilité ou non de l'écrire $X = U + V$ comme précédemment.

Remarque. — Le calcul direct est encore plus facile : pour $\theta \neq 0$, par deux arguments successifs de parité, on a

$$\begin{aligned}\varphi_X(\theta) &= \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x}(1-|x|)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \cos(\theta x)(1-|x|)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \cos(\theta x)(1-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2\sin(\theta x)}{\theta}(1-x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2\sin(\theta x)}{\theta}\,\mathrm{d}x = 0 + \left[-\frac{2\cos(\theta x)}{\theta^2}\right]_0^1 = 2(1-\cos\theta)/\theta^2.\end{aligned}$$

Mais évidemment, on voit moins de probabilités en cours de route.

Exercice 5 (*transformée de Mellin*). — Soit X une variable aléatoire positive. Sa *transformée de Mellin* est la fonction

$$T_X(\theta) = \mathbb{E}\big[X^\theta\big]$$

pour toutes les valeurs de θ pour lesquelles l'espérance de X^θ existe.

(i) Montrer que $T_X(\theta) = \varphi_{\ln X}(\theta/\mathrm{i})$ quand les deux membres sont bien définis.

(ii) Montrer que si X et Y sont indépendantes et positives, on a $T_{XY}(\theta) = T_X(\theta)\,T_Y(\theta)$.

(iii) Montrer que $T_{bX^a}(\theta) = b^\theta T_X(a\theta)$ pour $b > 0$ et $a\theta$ dans le domaine de définition de T_X.

(iv) Trouver la transformée de Mellin d'une variable aléatoire log-normale X de paramètres (m, σ^2). Utiliser le fait que $T_X(k) = \mathbb{E}[X^k]$ pour calculer le k-ième moment de X pour $k = 1, 2, \ldots$

Correction. — Attention aux 0^0 ?

(i) Remarquons que $T_X(\theta) = \mathbb{E}[X^\theta]$ et $\varphi_{\ln X}(\theta/\mathrm{i}) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta \ln X}]$ sont bien définies dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ puisque les variables aléatoires qu'on intègre sont positives. Comme $\mathrm{e}^{\theta\ln X} = X^\theta$, l'égalité est alors évidente.

(ii) Soient X et Y positives, indépendantes, et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, X^θ et Y^θ sont positives et indépendantes et le théorème de Fubini–Tonelli permet d'affirmer que $\mathbb{E}[(XY)^\theta] = \mathbb{E}[X^\theta \times Y^\theta] = \mathbb{E}[X^\theta] \times \mathbb{E}[Y^\theta]$, soit $T_{XY} = T_X \times T_Y$.

(iii) On a $T_{bX^a}(\theta) = \mathbb{E}[(bX^a)^\theta] = b^\theta\,\mathbb{E}[X^{a\theta}] = b^\theta T_X(a\theta)$.

(iv) Une variable aléatoire X est log-normale de paramètres (m, σ^2), si elle est presque sûrement strictement positive et si $\ln(X)$ a pour loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. D'après la question (i), $T_X(\theta) = \varphi_{\ln(X)}(\theta/i) = \exp(m\theta + \sigma^2\theta^2/2)$. Les moments s'en déduisent immédiatement.

Remarque. — Cet exercice peut sembler creux. Son rôle est de faire parler de la transformation de Mellin.

Exercice 6 (*loi de Laplace*). — Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, la loi de Laplace, c'est-à-dire $P_{X_i}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$. Notons $\varphi = \varphi_{X_i}$ la fonction caractéristique de X_i. On définit les variables aléatoires Y_1 et Y_2 par

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Montrer les faits suivants :

(i) on a $\varphi(\theta) = (1+\theta^2)^{-1}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$;

(ii) les variables aléatoires Y_1 et Y_2 ont même fonction caractéristique, donc même loi ; elles sont non corrélées et ne sont pas indépendantes.

Correction. — (i) Le calcul suivant tient compte de la parité de la fonction de densité :

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \cos(x\theta)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta x}}{2}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}\theta)x} + \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i}\theta)x}}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[-\frac{\mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i}\theta)x}}{1-\mathrm{i}\theta} - \frac{\mathrm{e}^{-(\mathrm{i}\theta+1)x}}{1+\mathrm{i}\theta}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\theta}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{1+\mathrm{i}\theta+1-\mathrm{i}\theta}{(1-\mathrm{i}\theta)(1+\mathrm{i}\theta)} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1+\theta^2} = \frac{1}{1+\theta^2}\end{aligned}$$

comme annoncé.

(ii) Puisque la loi considérée est symétrique, φ est paire ou encore $\varphi_X = \varphi_{-X}$. Par indépendance de X_1 et X_2 (ou $-X_2$) on a

$$\varphi_{Y_1} = \varphi_{X_1-X_2} = \varphi_{X_1} \times \varphi_{-X_2} = \varphi \times \varphi = \varphi^2,$$

ainsi que

$$\varphi_{Y_2} = \varphi_{X_1+X_2} = \varphi_{X_1} \times \varphi_{X_2} = \varphi \times \varphi = \varphi^2.$$

Les lois de Y_1 et Y_2 ont même fonction caractéristique, elles sont donc égales.

Pour calculer la covariance de Y_1 et Y_2, remarquons tout d'abord que les X_i sont de carré intégrable et d'espérance nulle par symétrie de leur loi. Nous avons alors

$$\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = \mathbb{E}[Y_1Y_2] = \mathbb{E}[(X_1 - X_2)(X_1 + X_2)] = \mathbb{E}[X_1^2 - X_2^2] = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_2^2] = 0$$

puisque X_1 et X_2 ont même moment d'ordre 2 (car elles ont même loi). Les variables Y_1 et Y_2 sont donc non corrélées.

Pour montrer que Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendantes, il suffit d'identifier leurs lois respectives ainsi que leur loi conjointe et constater que cette dernière n'est pas égale au produit des précédentes. Tout d'abord, la loi des Y_i est le carré de convolution de la loi de Laplace qui admet une densité. Ce carré admet alors une densité f qui est le carré de convolution de la densité de la loi de Laplace :

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|y-z|}\right) \times \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|z|}\right) \mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-|y-z|-|z|}\,\mathrm{d}z.$$

Puisque la loi de Laplace est symétrique, il en est de même de son carré de convolution. Nous pouvons donc supposer pour ce calcul $y \geqslant 0$. Une petite discusion sur les signes des différentes expressions entre valeurs absolues mène à

$$\begin{aligned}f(y) &= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-y+z+z}\,\mathrm{d}z + \int_0^{y} \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-y+z-z}\,\mathrm{d}z + \int_y^{+\infty} \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{y-z-z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-y} + \frac{y}{4}\,\mathrm{e}^{-y} + \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-y} = \frac{1}{4}(y+1)\,\mathrm{e}^{-y}.\end{aligned}$$

Par symétrie, on a

$$f(y) = \frac{1}{4}(|y|+1)\,\mathrm{e}^{-|y|}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Passons maintenant à la loi conjointe de $Y = {}^t(Y_1, Y_2)$. Nous avons $Y = AX$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X = {}^t(X_1, X_2).$$

La matrice A est inversible de déterminant $\det A = 2$, et on a

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

La loi de Y admet alors pour densité

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X \circ A^{-1}(y_1, y_2) \times \frac{1}{|\det A|}$$

qui est un cas particulier de la formule du changement de variables classique lorsque la transformation est linéaire. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} f_Y(y_1, y_2) &= f_X\big((y_1 + y_2)/2, (-y_1 + y_2)/2\big) \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|(y_1+y_2)/2|} \times \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|(-y_1+y_2)/2|} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-|y_1+y_2|/2-|y_1-y_2|/2}. \end{aligned}$$

Il est alors clair que $f_Y(y_1, y_2)$ et $f(y_1) \times f(y_2)$ ne sont pas égales $\mathrm{d}y_1 \otimes \mathrm{d}y_2$ presque partout (comme elles sont continues, il suffit pour cela que les deux fonctions diffèrent en un seul point ; en regardant ce qu'il se passe pour $y_1 = y_2$, on a $f_Y(y, y) = \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-|y|}$ alors que $f(y) \times f(y) = \frac{1}{16}(|y| + 1)^2\,\mathrm{e}^{-2|y|}$, fonctions notablement différentes), et donc que les lois correspondantes ne sont pas égales : la loi conjointe de Y_1 et Y_2 est différente de leur loi produit, Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendantes.

Remarque. — La densité marginale f aurait pu être obtenue après identification de la densité conjointe en intégrant cette dernière sur l'autre variable.

Exercice 7 (*fonction caractéristique d'un produit de variables aléatoires indépendantes*). — Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.

(i) Démontrer que la fonction caractéristique du produit XY est donnée par

$$\varphi_{XY}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(\theta y)\, P_Y(\mathrm{d}y), \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Si de plus X et Y ont même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, déterminer la fonction φ_{XY}.

(ii) Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des variables aléatoires réelles indépendantes, de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $X_1X_2 + X_3X_4$ suit une loi de Laplace et que $|X_1X_2 + X_3X_4|$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1.

Correction. — Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes.

(i) On a par le théorème de transfert

$$\varphi_{XY}(\theta) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta XY}\big] = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta xy}\, P_{(X,Y)}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y),$$

puis par indépendance de X et de Y et en utilisant le théorème de Fubini

$$\varphi_{XY}(\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta xy}\, P_X(\mathrm{d}x) \otimes P_Y(\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta xy}\, P_X(\mathrm{d}x)\bigg) P_Y(\mathrm{d}y),$$

soit

$$\varphi_{XY}(\theta) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(y\theta)\, P_Y(\mathrm{d}y).$$

(ii) Soient X_1, X_1, X_1, X_1 quatre variables aléatoires indépendantes de même loi la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour $i \neq j$, on a d'après la question précédente

$$\begin{aligned} \varphi_{X_iX_j}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{X_i}(y\theta) \times \mathrm{e}^{-y^2/2}\, \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2\theta^2/2} \times \mathrm{e}^{-y^2/2}\, \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(1+\theta^2)y^2/2}\, \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}} = \sigma \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2\sigma^2}\, \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} = \sigma \end{aligned}$$

avec $\sigma = 1/\sqrt{1+\theta^2}$. Comme les produits X_1X_2 et X_3X_4 sont indépendants, on a

$$\varphi_{X_1X_2+X_3X_4}(\theta) = \varphi_{X_1X_2}(\theta) \times \varphi_{X_3X_4}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \times \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{1}{1+\theta^2}\,.$$

On reconnaît en $\varphi_{X_1X_2+X_3X_4}$ la fonction caractéristique de la loi de Laplace. Par conséquent, la loi de $X_1X_2 + X_3X_4$ est la loi de Laplace.

Il est alors assez clair que $|X_1X_2 + X_3X_4|$ suit la loi exponentielle de paramètre 1. De manière détaillée, soient Z une variable aléatoire de loi la loi de Laplace, $B \subset \mathbb{R}_+$ un ensemble borélien. Puisque $\mathbb{P}\{Z = 0\} = 0$, on peut supposer que B ne contient pas 0. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|Z| \in B\} &= \mathbb{P}\{Z \in -B \cup B\} = \mathbb{P}\{Z \in -B\} + \mathbb{P}\{Z \in B\}\\ &= \int_{-B} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|z|}\,\mathrm{d}z + \int_B \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|z|}\,\mathrm{d}z = 2\int_B \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z = \int_B \mathrm{e}^{-z}\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Exercice 8 (*on peut avoir $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$ sans que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes*). — Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$ de paramètre 1 et soient a, b, c, d des nombres réels strictement positifs. Considérons les variables aléatoires X et Y définies par

$$X = aU + bV, \qquad Y = cU + dV.$$

(i) Calculer la fonction caractéristique $\varphi_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X, Y) et en déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

(ii) Calculer la fonction caractéristique φ_{X+Y} de $X+Y$ et en déduire l'égalité des lois $P_{X+Y} = P_X * P_Y$.

Correction. — (i) On a

$$\begin{aligned}\varphi_{(X,Y)}(\theta_1,\theta_2) &= \mathbb{E}\big[\exp\big(\mathrm{i}\theta_1X + \mathrm{i}\theta_2Y\big)\big]\\ &= \mathbb{E}\big[\exp\big(\mathrm{i}(a\theta_1 + c\theta_2)U + \mathrm{i}(b\theta_1 + d\theta_2)V\big)\big]\\ &= \mathbb{E}\big[\exp\big(\mathrm{i}(a\theta_1 + c\theta_2)U\big)\big] \times \mathbb{E}\big[\exp\big(\mathrm{i}(b\theta_1 + d\theta_2)V\big)\big]\\ &= \varphi_U(a\theta_1 + c\theta_2) \times \varphi(b\theta_1 + d\theta_2)\\ &= \exp(-|a\theta_1 + c\theta_2| - |b\theta_1 + d\theta_2|).\end{aligned}$$

Pour déterminer φ_X ou φ_Y, il suffit de considérer $\theta_2 = 0$ ou $\theta_1 = 0$. On a ainsi

$$\varphi_X(\theta) = \exp\big(-(a+b)|\theta|\big) \qquad \text{et} \qquad \varphi_Y(\theta) = \exp\big(-(c+d)|\theta|\big)$$

(ce qui permet de voir au passage que X suit la loi de Cauchy de paramètre $a+b$, et Y celle de paramètre $c+d$), et par conséquent

$$\varphi_X(\theta_1) \times \varphi_Y(\theta_2) = \exp\big(-(a+b)|\theta_1| - (c+d)|\theta_2|\big)$$

qui peut différer de $\varphi_{(X,Y)}(\theta_1,\theta_2)$ lorsque θ_1 et θ_2 sont de signe opposés. Par exemple, pour $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 = -\theta_1$, on a

$$|a\theta_1 + c\theta_2| + |b\theta_1 + d\theta_2| = (|a-c| + |b-d|)\theta_1 < (a+b+c+d)\theta_1 = (a+b)|\theta_1| + (c+d)|\theta_2|,$$

et ainsi pour ce choix $\varphi_X(\theta_1) \times \varphi_Y(\theta_2) \neq \varphi_{(X,Y)}(\theta_1,\theta_2)$. Donc, X et Y ne sont pas indépendantes.

(ii) On a

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(\theta) &= \mathbb{E}\big[\exp\big(\mathrm{i}\theta(a+c)U\big)\times\exp\big(\mathrm{i}\theta(b+d)V\big)\big]\\ &= \mathbb{E}\big[\exp\big(\mathrm{i}\theta(a+c)U\big)\big]\times\mathbb{E}\big[\exp\big(\mathrm{i}\theta(b+d)V\big)\big]\\ &= \varphi_U\big((a+c)\theta\big)\times\varphi_V\big((b+d)\theta\big)\\ &= \exp\big(-(a+c)|\theta|\big)\times\exp\big(-(b+d)|\theta|\big)\\ &= \exp\big(-(a+b)|\theta|\big)\times\exp\big(-(c+d)|\theta|\big) = \varphi_X(\theta)\times\varphi_Y(\theta).\end{aligned}$$

Donc $P_{X+Y} = P_X * P_Y$, d'où la conclusion.

Université de Poitiers — 1m02–Probabilités Générales
Département de Mathématiques — Année 2011–2012

FEUILLE N° 2

Exercice 1 (*lois de sommes de variables aléatoires indépendantes*). — Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes. Donner la loi de $Y = X_1 + \cdots + X_n$ dans les cas suivants :

(i) X_k de loi $\mathcal{B}(n_k, p)$, $k = 1, \ldots, n$.

(ii) X_k de loi $\mathcal{P}(\lambda_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

(iii) X_k de loi $\mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, \ldots, n$.

(iv) X_k de loi $\gamma(a_k, p)$, $k = 1, \ldots, n$.

(v) X_k de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $k = 1, \ldots, n$.

Correction. — Non disponible.

Exercice 2 (*combinaisons linéaires de variables aléatoires gaussiennes*). — Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$ et considérons les variables aléatoires définies par $Y = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ et $Z = b_1X_1 + \cdots + b_nX_n$ où $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.

(i) Montrer que Y de loi $\mathcal{N}(0,1)$ si et seulement si $\|a\| = 1$.

(ii) Montrer que Y et Z sont indépendantes si et seulement si $a \perp b$.

Correction. — Non disponible.

Exercice 3 (*carrés de variables aléatoires gaussiennes – lois du chi-deux*). — (i) Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. La loi de X^2 est appelée *loi du chi-deux à un degré de liberté* et notée $\chi^2(1)$. Montrer que $\chi^2(1) = \gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(ii) Soient $X_1, \ldots, X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. La loi de $Y = X_1^2 + \ldots + X_n^2$ est appelée *loi du chi-deux à n degrés de liberté* et notée $\chi^2(n)$. Montrer que $\chi^2(n) = \gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.

Correction. — Non disponible.

Exercice 4 (*signe aléatoire*). — Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et ε une variable aléatoire de loi de Bernoulli, indépendante de X, telle que $\mathbb{P}\{\varepsilon = 1\} = \mathbb{P}\{\varepsilon = -1\} = \frac{1}{2}$.

(i) Montrer que X et εX ont même loi et calculer $\operatorname{cov}(X, \varepsilon X)$.

(ii) X et εX sont-elles indépendantes ?

(iii) Montrer que le vecteur aléatoire $(X, \varepsilon X)$ n'est pas gaussien. Conclusion ?

Correction. — Non disponible.

Exercice 5 (*somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires indépendantes, identité de Wald*). — Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite infinie de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi, et N une variable aléatoire à valeurs entières, indépendante des $(X_i)_{i \geqslant 1}$. Supposons que $\mathbb{E}[|X_i|] < \infty$ et $\mathbb{E}[N] < \infty$. On pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \qquad \text{et} \qquad S_N = X_1 + \cdots + X_N,$$

avec la convention que $S_N = 0$ sur l'ensemble où $N = 0$.

(i) Montrer que $\varphi_{S_N}(\theta) = \mathbb{E}\big[\varphi_{X_i}(\theta)^N\big]$.

(ii) En déduire que $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[N] \times \mathbb{E}[X_i]$.

Correction. — Non disponible.

Exercice 6 (*moyenne empirique et variance empirique*). — Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Posons

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{et} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

(Les variables aléatoires $\bar{X}$ et S^2 sont connues sous le nom de *moyenne empirique* et *variance empirique* respectivement.)

(i) Trouver la fonction caractéristique de $(\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \dots, X_n - \bar{X})$.

(ii) En déduire que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes.

Correction. — Non disponible.

Exercice 7 (*fonction caractéristique et support de loi*). — Soit X une variable aléatoire réelle de fonction caractéristique φ_X.

(i) Démontrer que s'il existe $\theta_0 \neq 0$ tel que $|\varphi_X(\theta_0)| = 1$, alors la loi de X est discrête ; plus précisément, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$P_X \left\{ a + \mathbb{Z} \frac{2\pi}{\theta_0} \right\} = 1.$$

(ii) S'il existe deux réels θ_1 et θ_2 non nuls tels que θ_1 / θ_2 soit irrationnel et tels que $|\varphi_X(\theta_1)| = |\varphi_X(\theta_2)| = 1$, alors la loi de X est dégénérée, c'est-à-dire que X est P-p.s. égale à une constante.

Correction. — Non disponible.

Exercice 8 (*critère d'indépendance de variables aléatoires bornées*). — Soient X et Y deux variables aléatoires réelles bornées. Démontrer que pour que X et Y soient indépendantes, il faut et il suffit que

$$\mathbb{E}[X^k Y^\ell] = \mathbb{E}[X^k] \; \mathbb{E}[Y^\ell], \qquad \forall\, k, \ell = 0, 1, \dots$$

Correction. — Non disponible.

Exercice 9 (*fonctions caractéristiques et développements asymptotiques*). — Soit X une variable aléatoire réelle de fonction caractéristique φ_X.

(i) Montrer que si $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ pour un entier n, on a

$$\varphi_X(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\theta)^k}{k\,!} \, \mathbb{E}[X^k] + \frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n\,!} \, \varepsilon_n(\theta),$$

où $|\varepsilon_n(\theta)| \leqslant 3 \, \mathbb{E}[|X|^n]$ et $\varepsilon_n(\theta) \to 0$, $\theta \to 0$.

(ii) Montrer que si $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et si $\displaystyle\limsup_{n \to \infty} \frac{\mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}}{n} = \frac{1}{\mathrm{e} \times R} < \infty$, alors on a

$$\varphi_X(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n\,!} \, \mathbb{E}[X^n], \qquad \forall\, |\theta| < R.$$

De plus, la loi de X est uniquement déterminée par les moments $m_n = \mathbb{E}[X^n]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction. — Cet exercice est en fait un complément sur les premières propriétés de la fonction caractéristique de la loi d'une variable aléatoire réelle, propriétés énoncées dans le livre de A.N. Shiryaev, théorème 1 du chapitre correspondant.

(i) Supposons que pour $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Puisque

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k\,!} + \frac{(\mathrm{i}y)^n}{n\,!}\big(\cos(\varrho_1 y) + \mathrm{i}\sin(\varrho_2 y)\big)$$

pour $y \in \mathbb{R}$, avec $|\varrho_1| \leqslant 1$ et $|\varrho_2| \leqslant 1$, on a

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathrm{i}\theta X)^k}{k\,!} + \frac{(\mathrm{i}\theta X)^n}{n\,!}\big(\cos(\varrho_1(\omega)\theta X) + \mathrm{i}\sin(\varrho_2(\omega)\theta X)\big)$$

et

$$\mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}\big] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathrm{i}\theta)^k}{k\,!}\,\mathbb{E}[X^k] + \frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n\,!}\big(\mathbb{E}[X^n] + \varepsilon_n(\theta)\big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}\theta)^k}{k\,!}\,\mathbb{E}[X^k] + \frac{(\mathrm{i}\theta)^n}{n\,!}\,\varepsilon_n(\theta),$$

où

$$\varepsilon_n(\theta) = \mathbb{E}\big[X^n\big(\cos(\varrho_1(\omega)\theta X) + \mathrm{i}\sin(\varrho_2(\omega)\theta X) - 1\big)\big].$$

Il est clair que $|\varepsilon_n(\theta)| \leqslant 3\,\mathbb{E}[|X^n|]$. Le théorème de convergence dominée montre que $\varepsilon_n(\theta) \to 0$ quand $\theta \to 0$.

(ii) Soit $0 < \theta_0 < R$. Avec la formule de Stirling on trouve que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[|X|]^n]^{1/n}}{n} < \frac{1}{\mathrm{e}\times\theta_0} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \frac{\big(\mathbb{E}[|X|]^n\theta_0^n\big)^{1/n}}{n} < \frac{1}{\mathrm{e}} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \bigg(\frac{\mathbb{E}[|X|]^n\theta_0^n]}{n\,!}\bigg)^{1/n} < 1.$$

En conséquence, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{E}[|X|^n]|\theta|^n/n\,!$ converge d'après la règle de Cauchy, et ainsi, la série $\sum_{k\geqslant 0}\big((\mathrm{i}\theta)^k/k\,!\big)\,\mathbb{E}[X^n]$ converge pour $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$. Mais, d'après la question précédente, pour $n \geqslant 1$,

$$\varphi_X(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{i}\theta)^n}{n\,!}\,\mathbb{E}[|X|^k] + R_n(\theta),$$

où $|R_n(\theta)| \leqslant 3(|\theta|^n/n\,!)\,\mathbb{E}[|X|^n]$. Ainsi,

$$\varphi_X(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}\theta)^n}{n\,!}\,\mathbb{E}[|X|^k]$$

pour tout $\theta \in \left]-R, R\right[$. Il est alors clair que φ_X est déterminée par les moments de X, il en est donc de même de la loi de X.

FEUILLE N° 3. — VECTEURS GAUSSIENS

Exercice 1 (*la propriété d'être un vecteur gaussien est plus forte que le fait que chaque composante soit gaussienne*). — Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $a > 0$. Posons

$$Y = X\mathbb{1}_{\{|X|\leqslant a\}} - X\mathbb{1}_{\{|X|>a\}}.$$

(i) Montrer que Y est aussi de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(ii) Montrer que le vecteur (X, Y) n'est pas gaussien.

Correction. — Non disponible.

Exercice 2 (*une transformée non linéaire de variables aléatoires gaussiennes peut être gaussienne*). — Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles indépendantes, gaussiennes de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que

$$\frac{X + YZ}{\sqrt{1+Z^2}} \text{ est de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

Correction. — Non disponible.

Exercice 3 (*un vecteur non-gaussien dont les densités conditionnelles sont gaussiennes*). — Soit (X, Y) une variable aléatoire de densité sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c\ \mathrm{e}^{-(1+x^2)(1+y^2)},$$

où c est choisi de manière à ce que $f_{(X,Y)}$ soit effectivement une densité. Montrer que le couple (X, Y) n'est pas gaussien, mais que les densités conditionnelles $f_{X=x}$ et $f_{Y=y}$ sont des densités gaussiennes.

Correction. — Non disponible.

Exercice 4 (*caractérisation des lois gaussiennes sur* $\mathbb{R}$). — Soit X une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{E}[X^2] = \sigma^2 > 0$. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X et de même loi.

Montrer les faits suivants:

(i) si X est $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors $(X+Y)/\sqrt{2}$ est $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$;

(ii) si X et $(X+Y)/\sqrt{2}$ ont même loi, alors X est $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Correction. — Non disponible.

Exercice 5 (*forme quadratique d'une variable aléatoire gaussienne*). — Soit X de loi $\mathcal{N}(m, C)$ sur $\mathbb{R}^d$ avec $\det C > 0$. Montrer que

$$(X-m)^*\, C^{-1}\, (X-m) \text{ suit la loi } \chi^2(d).$$

Correction. — Non disponible.

Exercice 6 (*la norme carré d'une variable aléatoire gaussienne*). — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un espace euclidien E de dimension d, de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, I_E)$. Soit a un vecteur unitaire de E et U et V les variables aléatoires réelles définies par

$$U = \langle X, a\rangle \qquad \text{et} \qquad V = \|X\|^2 - \langle X, a\rangle^2.$$

(i) Démontrer que U et V sont indépendantes et identifier leur loi.

(ii) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans E de loi $\mathcal{N}(m, I_E)$, où $m \in E$. Déduire que la loi de $\|Y\|^2$ est la convolution d'un chi-deux à $d-1$ degrés de liberté et de la loi du carré d'une gaussienne réelle de loi $\mathcal{N}(\|m\|, 1)$.

Correction. — Non disponible.

EXERCICE 7 (*moyenne empirique et variance empirique ;* voir Ex. 6 feuille de TD n$^{\text{O}}$ 2). — Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Posons

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{et} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2.$$

Montrer que $(n-1)S^2/\sigma^2$ admet la loi $\chi^2(n-1)$ et que $n\bar{X}^2/\sigma^2$ admet la loi $\chi^2(1)$.

Indication : Utiliser $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - \bar{X})^2 + n\bar{X}^2$.

Correction. — Non disponible.

FEUILLE N° 4. — CONVERGENCES EN LOI

Exercice 1 (*convergence en loi des variables normales*). — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$, et supposons que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Montrer que les suites m_n et σ_n^2 ont des limites $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma^2 \geqslant 0$, et que X est $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Correction. — Non disponible.

Exercice 2 (*convergence en loi et convergence de densités*). — Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et admettant les densités $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et f. Montrer que, si la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers f presque partout (relativement à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$), alors la suite des lois des $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers la loi de X.

Correction. — Non disponible.

Exercice 3 (*théorème de Slutsky*). — Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires convergeant en loi vers X, et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ des variables aléatoires convergeant en probabilité vers une constante c, toutes ces variables aléatoires étant définies sur le même espace probabilisé. Montrer que

$$\text{(a)} \qquad X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX, \qquad \text{et} \qquad \text{(b)} \qquad \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{X}{c} \qquad \text{si } c \neq 0.$$

Correction. — Non disponible.

Exercice 4 (*convergence en loi de sommes de variables aléatoires*). — Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé.

(i) Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si $Y_n \xrightarrow{P} 0$, montrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

(ii) On suppose que X_n et Y_n sont indépendantes pour tout n et que X est indépendante de Y. Montrer que, si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et si $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$, alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$.

(iii) Montrer que (b) devient faux si on supprime l'hypothèse « pour tout n, les variables X_n et Y_n sont indépendantes ».

Correction. — Non disponible.

Exercice 5 (*une limite presque sûrement*). — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(1, 3)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2} = \frac{1}{4} \qquad \text{p.s.}$$

Correction. — C'est simplement l'utilisation de la loi forte des grands nombres. Les $(X_n)_{n\geqslant 1}$ étant indépendantes identiquement distribuées et intégrables, on a

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[X_1] = 1 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Les $(Y_n)_{n\geqslant 1} = (X_n^2)_{n\geqslant 1}$ étant indépendantes identiquement distribuées et intégrables, on a

$$\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[X_1^2] = \mathrm{Var}(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2 = 3 + 1 = 4$$

quand $n \to \infty$. La fonction f définie par $f(x,y) = x/y$ étant continue en $(1,4)$, La suite $(f(\bar{X}_n, \bar{Y}_n))_{n\geqslant 1}$ converge presque sûrement vers $f(1,4) = 1/4$ (même si éventuellement des termes sont non définis). D'où la conclusion.

Exercice 6 (*jeu de la roulette et théorème central limite*). — La probabilité de gagner une partie au jeu de la roulette est de 19/37 (on se place du point de vue du casino) et la mise d'un joueur à une partie est d'un euro. Quel est approximativement le nombre minimum n_0 de parties qui doivent être jouées journellement pour que le casino gagne avec une probabilité 1/2 au moins 1000 euros par jour ? Quelle est la probabilité d'une perte globale pour le casino durant ces n_0 parties ?

Correction. — Non disponible.

Exercice 7 (*une application non probabiliste du théorème central limite*). — Utiliser le théorème central limite pour montrer que

$$(a)\quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k\,!}\right) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad (b)\quad \lim_{n\to\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant n+t\sqrt{n}} \frac{n^k\,\mathrm{e}^{-n}}{k\,!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Indication. — Considérer une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.

Correction. — Non disponible.

Exercice 8 (*théorème central limite pour des variables de Poisson*). — Soit X^λ une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la suite des lois des variables $(X^\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ converge vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$ quand $\lambda \to \infty$.

Correction. — Non disponible.

Exercice 9 (*théorème central limite pour une somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires*). — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, centrées, de variance σ^2. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $(N_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendantes de la suite (X_n). Montrer que si $N_n \to +\infty$ p.s. quand $n \to \infty$, alors la suite des lois des variables aléatoires

$$Z_n = \frac{S_{N_n}}{\sqrt{N_n}}$$

converge vers une loi que l'on déterminera.

Correction. — Non disponible.

Exercice 10 (*développement décimal*). — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble des entiers $\{0, 1, \ldots, 9\}$. On définit, pour tout $n \geqslant 1$, la variable aléatoire $Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k 10^{-k}$. Démontrer que la suite Z_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire Z dont on déterminera la loi.

Correction. — Non disponible.

Exercice 11 (*événements indépendants*). — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements indépendants tels que $\mathbb{P}(E_n) = 1/n$ pour tout n. On pose $N_n = \mathbb{1}_{E_1} + \cdots + \mathbb{1}_{E_n}$. Montrer que la suite des lois des variables aléatoires

$$\frac{N_n - \ln n}{\sqrt{\ln n}}$$

converge vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Correction. — Non disponible.

EXERCICE 12 (*what's fair about a fair game ?*). — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires telles que

$$X_n = \begin{cases} n^2 - 1 & \text{avec probabilité } 1/n^2, \\ -1 & \text{avec probabilité } 1 - 1/n^2 \end{cases}.$$

Montrer que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ pour tout n, mais si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors $\dfrac{S_n}{n} \to -1$, p.s.

Correction. — Non disponible.

EXERCICE 13 (*variance empirique*). — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. réelles intégrables de moyennes $m = \mathbb{E}[X_1]$ et de variance $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$.

(i) On pose

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2.$$

Calculer $\mathbb{E}[S_n^2]$, et montrer que $S_n^2 \to \sigma^2$ p.s., lorsque $n \to \infty$.

(ii) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on définit :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{et} \qquad \widehat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2.$$

Calculer $\mathbb{E}[\widehat{S}_n^2]$, et montrer que $\widehat{S}_n^2 \to \sigma^2$ p.s., lorsque $n \to \infty$.

Correction. — Non disponible.

EXERCICE 14. — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{E}[X_1] = 1$ et $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 \in]0, \infty[$. Montrer que

$$\frac{2}{\sigma}\left(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \qquad \text{où } Z \text{ est de loi } \mathcal{N}(0,1).$$

Indication : $\dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{S_n} + \sqrt{n}}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{S_n} - \sqrt{n}\right)$.

Correction. — Non disponible.

FEUILLE N° 5. — MARTINGALES

Exercice 1 (*transformée de sur-martingale*). — Soit $(X_n)_{n\geqslant 0}$ une sur-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ et soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires non-négatives et bornées, ε_n étant $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geqslant 1$ et ε_0 constante. On pose $Z_0 = X_0$, et pour $n \geqslant 1$, $Z_n = X_n - X_{n-1}$. Montrer que la suite

$$Y_n = \varepsilon_0 Z_0 + \cdots + \varepsilon_n Z_n$$

est une sur-martingale.

Correction. — Non disponible.

Exercice 2 (*martingale équi-distribuée*). — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une sur-martingale telle que toutes les variables aléatoires aient même loi.

(i) Montrer que $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale.

(ii) Montrer que, pour tout réel a, les suites $(X_n \wedge a)_{n\geqslant 1}$ et $(X_n \vee a)_{n\geqslant 1}$ sont des martingales.

(iii) En déduire, si $n > m$, sur l'ensemble $\{X_m \geqslant a\}$, X_n est p.s. supérieur ou égal à a.

(iv) En déduire que $X_1 = \cdots = X_n = \ldots$ p.s.

Correction. — Non disponible.

Exercice 3 (*l'urne de Polya*). — Une urne contient des boules de deux couleurs différentes, des blanches et des rouges. Aux instants $n = 1, 2, \ldots$, on tire une boule de l'urne, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule supplémentaire, de la même couleur. On note B_n (resp. R_n) le nombres de boules blanches (resp. rouges) a l'issue du n-ième coup. On sait que $B_0 = k$ et $R_0 = \ell$, et on pose

$$X_n = \frac{B_n}{B_n + R_n}.$$

(i) Vérifier que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma\{B_0, \ldots, B_n\}$.

(ii) Montrer que X_n converge p.s. vers une variable aléatoire X_∞ lorsque $n \to \infty$.

(iii) Montrer que si $B_0 = 1$ et $R_0 = 1$, la loi de X_∞ est uniforme sur $[0, 1]$.

(iv) Soient $B_0 = R_0 = 1$ et $\beta_n = B_n - B_0$. Montrer que, pour tout $0 < \theta < 1$,

$$N_n^\theta = \frac{(n+1)\,!}{\beta_n\,!\,(n-\beta_n)\,!}\,\theta^{\beta_n}(1-\theta)^{n-\beta_n}, \qquad n \geqslant 1,$$

est une martingale.

Correction. — Non disponible.

Exercice 4 (*martingales produit et le théorème de Kakutani*). — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables positives indépendantes vérifiant $\mathbb{E}[X_i] = 1$. On pose $M_0 = 1$ et $M_n = \prod_{i=1}^n X_i$.

(i) Montrer que $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est une martingale et $M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n$ existe p.s.

(ii) On pose $a_n = \mathbb{E}\sqrt{X_n}$. Montrer que

$$M_\infty > 0 \text{ p.s. si et seulement si } \prod a_n > 0\,,$$

$$M_\infty = 0 \text{ p.s. si et seulement si } \prod a_n = 0\,.$$

Correction. — Non disponible.

EXERCICE 5 (*quotient de vraisemblance*). — Pour une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ on sait que

(H_0) $\forall\, n \geqslant 1,\ P_{(X_1,\dots,X_n)}(\mathrm{d}x) = p_n(x)\,\mathrm{d}x$ ou (H_1) $\forall\, n \geqslant 1,\ P_{(X_1,\dots,X_n)}(\mathrm{d}x) = q_n(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose

$$Z_n = \frac{q_n(X_1,\dots,X_n)}{p_n(X_1,\dots,X_n)}$$

(avec la convention que $Z_n = 0$ si le dénominateur s'annule).

(i) Montrer que sous l'hypothèse (H_0), la suite $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale p.s. convergente.

(ii) Montrer que si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. et si $p_1(t)dt \neq q_1(t)dt$, alors $Z_n \to 0$ p.s.

Correction. — Non disponible.

FEUILLE N° 6

Exercice 1 (*une preuve de la loi du* 0–1 *de Kolmogorov à l'aide des martingales*). — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$, $n \geqslant 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes, $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$ sa filtration naturelle, et $\mathcal{A}_\infty$ la tribu asymptotique associée. Soit $A \in \mathcal{A}_\infty$.

(i) Montrer que $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{P}(A)$ pour tout $n \geqslant 0$.

(ii) Montrer ensuite que $(\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_n])_{n\geqslant 0}$ converge vers $\mathbb{1}_A$ presque sûrement, et en déduire que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Correction. — Non disponible.

Exercice 2 (*temps d'atteinte pour les marches aléatoires simples*). — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X_n : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \{-1, 1\}$, $n \geqslant 1$, une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}\{X_n = -1\} = \mathbb{P}\{X_n = 1\} = 1/2$ pour tout n. On pose

$$S_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

Soit $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$ et $T = \inf\{n \geqslant 1 : S_n = 1\}$.

(i) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M_n^\theta = \frac{\mathrm{e}^{\theta S_n}}{(\cosh\theta)^n}\,, \qquad n \in \mathbb{N},$$

définit une martingale dans la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 0}$.

(ii) Montrer que T est un temps d'arrêt vérifiant $\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1$ mais $\mathbb{E}[T] = \infty$.

(iii) En utilisant le fait que $\mathbb{E}[M^\theta_{T_n}] = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$, trouver une formule pour $\mathbb{E}[\alpha^{-T}]$, où $\alpha = \cosh\theta$.

(iv) En déduire la loi de T.

Correction. — Non disponible.

Exercice 3 (*le pouvoir d'une minorité décidée*). — 1 000 000 d'électeurs participent à une élection entre deux candidats A et B. Parmi eux, 2 000 électeurs connaissent le candidat A à cause de l'organisation de la campagne électorale, et votent en bloc pour lui. Les 998 000 électeurs restants sont plus ou moins indécis et prennent leur décision indépendamment les uns des autres en jouant à pile ou face avec une pièce non faussée. Quelle est la probabilité $p(A)$ d'une victoire du candidat A ?

Correction. — Non disponible.

Exercice 4 (*Estimateur de variance minimum*). — Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. d'une loi de moyenne m et de variance σ^2.

(i) Donner la condition sur les constantes réelles $a_1, \ldots, a_n$ pour que $\sum_{k=1}^n a_k X_k$ soit un estimateur sans biais de m.

(ii) Parmi les estimateurs sans biais de cette forme déterminer celui qui est de variance minimum. Calculer sa variance.

Correction. — Non disponible.

Exercice 5 (*estimateur du maximum de vraisemblance*). — Soit *un modèle statistique* donné par une famille de lois absolument continues $\{P_\theta(\mathrm{d}x) = f_\theta(x)\,\mathrm{d}x : \theta \in \Theta\}$ sur $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$, où Θ est l'espace des paramètres. Si l'observation est constituée d'un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de taille n de variables de loi P_θ, on appelle *vraisemblance du modèle* la variable aléatoire

$$I_\theta(X_1, \dots, X_n) = f_\theta(X_1) \times \cdots \times f_\theta(X_n).$$

On appelle *statistique* toute fonction mesurable de $(X_1, \dots, X_n)$ et estimateur du maximum de vraisemblance toute statistique $\hat{\theta} = T(X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans Θ qui maximise la fonction $\theta \mapsto I_\theta(X_1, \dots, X_n)$.

(i) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires, chacune suivant une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

(ii) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires, chacune suivant la loi uniforme sur un intervalle $[0, \theta]$, $\theta > 0$. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

(iii) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de variables aléatoires, chacune suivant la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. Suivant que m ou σ^2 est connu, déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre inconnu.

Correction. — Non disponible.

Exercice 6 (*Intervalles de confiance asymptotiques*). — Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi commune de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour $\alpha \in]0,1[$ donné, construire une suite d'intervalles $I_n = I_n(X_1, \dots, X_n)$ tels que

$$\mathbb{P}\{\lambda \in I_n\} \to 1 - \alpha, \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

Correction. — Non disponible.

Exercice 7 (*fille ou garçon ?*). — En Suisse, entre 1871 et 1900, sont nés 1.359.670 garçons et 1.286.086 filles. Qu'est-ce que vous pensez de l'hypothèse que les filles et les garçons naissent avec la même probabilité ?

Correction. — Non disponible.

FEUILLE N° 7. — CHAÎNES DE MARKOV

EXERCICE 1 (*Visites à un état fixe et noyau potentiel*). — Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène de matrice de transition $P = (P(x,y))_{x,y\in E}$, où E est un ensemble dénombrable. Pour tout $y \in E$ on note, avec la convention $\inf \varnothing = +\infty$,

$$T_y = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = y\} \qquad \text{et} \qquad N_y = \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{\{X_m = y\}},$$

ce sont respectivement le *premier temps du passage en y* et le *nombre de visites de y*. La matrice G définie par $G(x,y) = \mathbb{E}^x[N_y] \leqslant +\infty$, nombre moyen de passages en y par la chaîne partant de x à l'instant 0, est appelée *le noyau potentiel* de la chaîne. On pose $F_n(x,y) = \mathbb{P}^x\{T_y = n\}$ et $F(x,y) = \mathbb{P}^x\{T_y < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x,y)$.

(i) Montrer que pour tout $x, y \in E$, on a $G(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} P^m(x,y)$, où $P^0 = I$ est la matrice identité, c'est-à-dire $I(x,y) = 1$ si $x = y$, 0 sinon.

(ii) Montrer que si $x \neq y$, alors $G(x,y) = F(x,y)G(y,y)$ (avec la convention $0 \times \infty = 0$).

(iii) Montrer que $F(x,x) = 1$ si et seulement si $G(x,x) = \infty$, et que si $F(x,x) < 1$, alors

$$G(x,x) = \frac{1}{1 - F(x,x)}.$$

(iv) Un état $x \in E$ est dit *récurrent* si $\mathbb{P}^x\{T_x < \infty\} = 1$ et *transient* si $\mathbb{P}^x\{T_x < \infty\} < 1$. Montrer que si x est transient, alors sous $\mathbb{P}^x$, la variable N_x suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - \mathbb{P}^x\{T_x < \infty\} = \mathbb{P}^x\{T_x = \infty\}$.

(v) En déduire que si E est fini, alors il existe au moins un état récurrent.

(vi) Soit x un état récurrent et $T = \inf\{n \geqslant 1 : X_n = x\}$. Montrer que

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}^x\left(\sum_{n=0}^{T-1} \mathbb{1}_{\{X_n = y\}}\right)$$

définit une mesure invariante, de plus $\mu_x(x) = 1$ et $\mu_x(E) = \mathbb{E}^x[T]$.

Correction. — Non disponible.

EXERCICE 2 (*théorème ergodique*). — Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène. Pour $x, y \in E$ on pose $M(x,y) = \mathbb{E}^x[T_y]$. Un état $x \in E$ est dit *récurrent nul* si x est récurrent et $M(x,x) = \infty$, et *récurrent positif* si x est récurrent et $M(x,x) < \infty$.

(i) Soit $R \subset E$ une classe de récurrence de période 1. Montrer que, pour tout $x, y \in R$,

$$P^n(x,y) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ est récurrent nul,} \\ 1/M(y,y) & \text{si } y \text{ est récurrent positif.} \end{cases}$$

(ii) Montrer les implications suivantes (avec la convention $1/\infty = 0$) :

a) Si y est transient, alors $P^n(x,y) \to 0$ pour tout $x \in E$.

b) Si y est récurrent apériodique, alors $P^n(x,y) \to F(x,y)/M(y,y)$ pour tout $x \in E$.

c) Si y est récurrent de période $d(y) = d > 0$, alors $P^n(y,y) \to d/M(y,y)$.

(iii) En déduire que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k(x,y) \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ est transient ou récurrent nul,} \\ \frac{F(x,y)}{M(y,y)} & \text{si } y \text{ est récurrent positif.} \end{cases}$$

Correction. — Non disponible.

Exercice 3 (*marches aléatoires sur* $\mathbb{Z}$). — Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires Bernoulli indépendantes avec $\mathbb{P}\{Z_n = 1\} = p$ et $\mathbb{P}\{Z_n = -1\} = 1-p$, où $0 < p < 1$. On pose $X_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de loi initiale $\mu = \delta_0$ et de noyau de transition

$$P(x, x+1) = p, \qquad P(x, x-1) = 1-p, \qquad x \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que tous les états sont récurrents si $p = \frac{1}{2}$ et tous les états sont transients si $p \neq \frac{1}{2}$.
Correction. — Non disponible.

Exercice 4 (*chaîne à deux états*). — Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0,1\}$ et de matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \qquad 0 < \alpha,\ \beta < 1.$$

(i) Calculer $\mathbb{E}^x[T_x]$ pour $x \in \{0,1\}$.

(ii) Calculer P^n et vérifier que, pour toute loi initiale μ_0,

$$\mathbb{P}^{\mu_0}\{X_n = 0\} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + (1-\alpha-\beta)^n\Big(\mu_0\{0\} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big).$$

(iii) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une certaine loi μ. Que vaut μ ?

(iv) Prouver que μ est une mesure invariante : $P_\mu\{X_n \in A\} = \mu(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(v) Calculer $\mathrm{Cov}^\mu(X_n, X_{n+1})$. Les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ sont-elles indépendantes ?
(vi) Calculer le potentiel de la chaîne.

(vii) On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que

$$\mathbb{E}[S_n] = \frac{n\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}^\mu(S_n) \leqslant Cn, \qquad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

(viii) (*Loi faible des grands nombres*) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \qquad \text{en probabilité sous } P_\mu, \text{ sous } P_0 \text{ et sous } P_1.$$

Correction. — Non disponible.

Exercice 5 (*chaîne de naissance et de mort*). — Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov d'espace d'états $E = \mathbb{N}$ et de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} p_i & \text{si } j = i+1, \\ r_i & \text{si } j = i, \\ q_i & \text{si } j = i-1, \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{array}{l} p_i + q_i + r_i = 1,\ p_i > 0, \\ q_0 = 0 \text{ et } q_i > 0 \ \text{ si } i \geqslant 1. \end{array}$$

On note $\gamma_0 = 1$, $\gamma_i = \dfrac{q_1 \times \cdots \times q_i}{p_1 \times \cdots \times p_i}$, et pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $\tau_i = \inf\{n \geqslant 0 : X_n = i\}$.

(i) Étant donné trois états a, i et b tels que $a \leqslant i \leqslant b$, on pose $u(i) = P_i\{\tau_a < \tau_b\}$. Exprimer $u(i)$ en fonction des γ_j pour $a \leqslant j < b$. Traiter le cas particulier où $p_i = q_i$ pour tout i.

(ii) Déterminer $P_1\{\tau_0 = \infty\}$ et montrer que la chaîne est récurrente si et seulement si $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = +\infty$.

(iii) Déterminer les mesures invariantes de la chaîne.

(iv) En déduire que la chaîne est récurrente positive (au sens que tous les états sont récurrents positifs) si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_1 \times \cdots \times p_{i-1}}{q_1 \times \cdots \times q_i} < +\infty.$$

Correction. — Non disponible.

DEVOIR À RENDRE LE MERCREDI 29 MARS

(i) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, telle que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ et $\sigma^2 \equiv \mathrm{Var}(X_1) > 0$. On pose $\alpha = \mathbb{E}[X_1]$. Montrer que

(ii) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \leqslant t\right\} = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \alpha \\ 1 & \text{si } t > \alpha \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \alpha. \end{cases}$

(iii) $\displaystyle \limsup_{n\to+\infty} \frac{(X_1 + \cdots + X_n) - n\alpha}{\sqrt{n}} = +\infty$ p.s.

(iv) Soit X une variable aléatoire bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}[|X|^{1/n}]^n \to \exp(\mathbb{E}[\ln |X|]), \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

(v) Soient X et Y deux variables aléatoires dans $L^1(P)$. Montrer les conditions suivantes:

(vi) Si X, Y sont i.i.d., alors on a

$$\mathbb{E}\left[X|\sigma\{X+Y\}\right] = \mathbb{E}\left[Y|\sigma\{X+Y\}\right] = \frac{X+Y}{2} \qquad \text{p.p.}$$

(vii) Si $\mathbb{E}\left[X|\sigma\{Y\}\right] = Y$ et $\mathbb{E}\left[Y|\sigma\{X\}\right] = X$, alors $X = Y$ p.p.

(viii)

(ix) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. réelles telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. On pose $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$ et

$$Z_n = (X_1 + \cdots + X_n)^2 - n\,\mathbb{E}[X_1^2]$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale.

(x) Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes avec $\mathbb{P}\{X_n = 1\} = \mathbb{P}\{X_n = -1\} = \frac{1}{2}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, \ldots, X_n\}$. Pour $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$Z_n = (\cos\lambda)^{-n} \exp\bigl(\mathrm{i}\lambda(X_1 + \cdots + X_n + \alpha)\bigr).$$

Montrer que $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ est une martingale complexe, c'est-à-dire les parties réelle et imaginaire de Z_n sont des martingales.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

1m02–Probabilités Générales
Année 2011–2012

TD DE PROBABILITÉS

Équipe pédagogique

- Cours : Marc Arnaudon (`e-mail : marc.arnaudon@math.univ-poitiers.fr`)
- TD : Clément Dombry (`e-mail : clement.dombry@math.univ-poitiers.fr`)
- TP : Anthony Phan (`e-mail : anthony.phan@math.univ-poitiers.fr`)

Mode d'emploi

Ce fascicule contient des séries d'exercices sur les différents chapitres du cours. Ils ne seront pas forcément tous traités en TD. Vous êtes invités à chercher à la maison la solution des exercices avant le TD, à résoudre seuls les exercices non traités... N'hésitez pas à me poser des questions au besoin. Les sujets de partiels et d'examens des deux années précédentes se trouvent à la fin du fascicule et peuvent servir d'entrainement lors de vos révisions.

Contenu

1. Base des probabilités,
2. Probabilités et espérances conditionnelles,
3. Convergence presque-sûre, en probabilités, L^p,
4. Fonctions caractéristiques,
5. Vecteurs gaussiens,
6. Convergence en loi,
7. Annales.

1. **Base des probabilités**

Exercice 1.1 (notions de base). — (i) Rappeler la définition d'espace probabilisé, de variable (ou vecteur) aléatoire, de loi d'une variable aléatoire, d'espérance d'une variable intégrable.

(ii) Rappeler le théorème de transfert.

Exercice 1.2 (un exemple simple : lancer de dés). — (i) Proposer un espace probabilisé modélisant le lancer de deux dés non pipés indépendants. Définir pour $i = 1, 2$ une variable aléatoire X_i représentant le résultat du i-ème dé ?

(ii) Quelle est la loi de X_i ? Son espérance ? Sa variance ?

(iii) Montrer que les événements « X_1 est pair » et « la somme $X_1 + X_2$ est paire » sont indépendants.

Exercice 1.3 (calculs de base). — Calculer l'espérance, la fonction de répartition, et la fonction caractéristique pour :

(i) la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$,

(ii) la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 1.4 (fonction caractéristique de la Gaussienne). — Calculer la fonction caractéristique de la loi de Gauss. On pourra montrer qu'elle est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

Exercice 1.5 (calcul d'espérance et variance pour des estimateurs). — Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de carré intégrable, de moyenne m et variance σ^2.

(i) Calculer l'espérance et la variance de l'estimateur de la moyenne

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(ii) Calculer l'espérance de l'estimateur de la variance

$$\widehat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

Exercice 1.6 (vecteur aléatoire donné par ses lois conditionnelles, partiel Mars 2008). — Soient X, Y, Z trois variables aléatoires réelles telles que

a) X a une loi uniforme sur $[0, 1]$,

b) sachant que $X = x \in [0, 1]$, Y admet une densité conditionnelle $f_{Y|X=x}$ donnée par

$$f_{Y|X=x}(y) = (y - x)\,\mathrm{e}^{-(y-x)}\,\mathbb{1}_{\{y>x\}},$$

c) sachant que $X = x \in [0, 1]$ et $Y = y > x$, Z admet une densité conditionnelle $f_{Z|X=x,Y=y}$ donnée par

$$f_{Z|X=x,Y=y}(z) = (y - x)\,\mathrm{e}^{-z(y-x)}\,\mathbb{1}_{\{z>0\}}.$$

(i) Quelle est la loi de (X, Y, Z) ?

(ii) Quelle est la loi de Z ?

(iii) Quelle est la loi conditionnelle de (X, Y) sachant $Z = z$?

(iv) On pose $U = Y - X$ et $V = Z(Y - X)$. Calculer la loi de (X, U, V). Les variables X, U et V sont elles indépendantes ?

Exercice 1.7 (probabilité et théorie des nombres). — On choisit au hasard un entier entre 1 et n. Pour p un entier non nul, $p \leqslant n$, on définit A_p l'événement « le nombre choisi est divisible par p ».

(i) Calculer la probabilité de A_p lorsque p est un diviseur de n.

(ii) Montrer que si $p_1, \ldots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les événements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$ sont indépendants.

(iii) On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction φ définie sur les entiers naturels dont la valeur $\varphi(n)$ est égale au nombre d'entiers non nuls inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que

$$\varphi(n) = n \times \prod_{p \text{ diviseur premier de } n} (1 - 1/p).$$

Exercice 1.8 (simulation par la méthode d'inversion). — Soit μ une loi sur $\mathbb{R}$ de fonction de répartition $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$. On appelle inverse généralisée de F la fonction F^{-1} définie pour tout $u \in]0, 1[$ par

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } F(x) \geqslant u\}.$$

(i) En utilisant les propriétés de la fonction de répartition F, montrer que pour tout $u \in]0,1[$, l'ensemble

$$D_u = \{x \in R : F(x) \geqslant u\}$$

est non vide, minoré (si bien que $F^{-1}(u)$ est bien défini), puis que $D_u = [F^{-1}(u), +\infty[$.

(ii) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $u \in]0,1[$, $u \leqslant F(x)$ si et seulement si $F^{-1}(u) \leqslant x$.

(iii) En déduire que si U suit une loi uniforme sur $[0,1]$, alors $F^{-1}(U)$ suit la loi μ.

(iv) En utilisant la méthode d'inversion, expliquer comment simuler une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$, la loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$, la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(v) Cette méthode est-elle efficace pour simuler les lois binomiales, les lois de Poisson, les lois normales ?

Exercice 1.9 (simulation de lois gaussiennes par la méthode polaire ou méthode de Box–Muller). — Montrer que si U, V sont deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$, alors les variables

$$X = \sqrt{-2\ln U} \times \cos(2\pi V) \qquad \text{et} \qquad Y = \sqrt{-2\ln U} \times \sin(2\pi V)$$

sont gaussiennes standard et indépendantes.

Exercice 1.10 (simulation de loi de Poisson). — Soient $(U_i)_{i\geqslant 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$, et $\lambda > 0$. On définit

$$N = \min\{n \geqslant 0 : U_0 \times \cdots \times U_n \leqslant \exp(-\lambda)\}.$$

Nous allons montrer que N suit une loi de Poisson. Pour $n \geqslant 0$, on définit $V_n = -\ln(U_n)$ et pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$.

(i) Calculer $\mathbb{P}\{N = 0\}$ et $\mathbb{P}\{N = 1\}$.

(ii) Pour $n \geqslant 1$, montrer que $\{N = n\} = \{S_n < \lambda \text{ et } S_{n+1} \geqslant \lambda\}$.

(iii) Montrer que la loi de S_n a pour densité

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!}\, \mathrm{e}^{-x}\, \mathbb{1}_{\{x\geqslant 0\}}.$$

(iv) Conclure.

2. **Probabilités et espérances conditionnelles**

Exercice 2.1 (question de cours, premières propriétés). — Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Donner la définition de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ et redémontrer les propriétés suivantes :

(i) $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]\big] = \mathbb{E}[X]$;

(ii) si X est $\mathcal{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = X$ presque sûrement ;

(iii) $\mathbb{E}[a_1 X_1 + a_2 X_2 \mid \mathcal{G}] = a_1\,\mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}] + a_2\,\mathbb{E}[X_2 \mid \mathcal{G}]$ presque sûrement ;

(iv) si $X \geqslant 0$ alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \geqslant 0$ presque sûrement ;

(v) si $\sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes, alors $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X]$ presque sûrement.

Correction. — Hypothèses à préciser.

Exercice 2.2 (variance conditionnelle). — Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. On pose $\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])^2 \bigm| \mathcal{G}\big]$.

(i) Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{Var}(X \mid \mathcal{G})] + \mathrm{Var}(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}])$. On pourra utiliser l'interprétation de l'espérance comme projecteur orthogonal dans le cas L^2.

Exercice 2.3 (question de cours, conditionnement discret). — Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Y est intégrable et que X est une variable aléatoire discrète prenant les valeurs x_i, $i \geqslant 1$. Expliciter la loi conditionnelle de Y sachant $\{X = x\}$ ainsi que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[Y \mid X]$.

Exercice 2.4 (somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées). — Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, indépendante des variables aléatoires X_i, d'espérance m et de variance s^2. On pose

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

(i) Montrer que la loi conditionnelle de S_N sachant $\{N = n\}$ est égale à celle de S_n.

(ii) Calculer $E[S_N \mid N]$ puis $E[S_N]$.

(iii) Calculer $\mathrm{Var}(S_N)$.

Exercice 2.5 (processus de Galton Watson). — Soit X une variable aléatoire à valeurs entières d'espérance m et variance σ^2. Soit $(X_r^n)_{n,r \in \mathbb{N}}$ une famille doublement infinie de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On considère une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $Z_0 = 1$ et, par récurrence,

$$Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + \cdots + X_{Z_n}^{(n+1)}.$$

(i) En utilisant l'exercice précédant, calculer $\mathbb{E}[Z_{n+1}]$ en fonction de $\mathbb{E}[Z_n]$, puis $\mathbb{E}[Z_n]$ en fonction de n.

(ii) De manière analogue, calculer la variance de Z_n en fonction de n.

Exercice 2.6 (urne de Polya). — Soit une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne de la manière suivante : à chaque tirage, on choisit au hasard une boule dans l'urne, puis on la replace dans l'urne, ainsi qu'une autre boule de la même couleur. On note S_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boule blanche dans l'urne après le n-ième tirage ($S_0 = 1$).

(i) Déterminer la loi de S_{n+1} conditionnellement à $S_n = k$.

(ii) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[S_{n+1} \mid S_n)$, puis $\mathbb{E}[S_n]$.

(iii) De manière analogue, calculer la variance de S_n. (*Indication.* — On pourra montrer que la quantité $Wn = \frac{S_n(S_n+1)}{(n+2)(n+3)}$ vérifie $\mathbb{E}[W_{n+1} \mid W_n] = W_n$.)

Exercice 2.7 (variables sans mémoire I). — Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ non constante. Soit $m \in \mathbb{N}$, on dit que T est une variable sans mémoire si la loi de $T - m$ sachant $\{T \geqslant m\}$ ne dépend pas de m.

(i) Montrer que les variables de loi géométrique sur $\mathbb{N}$ sont sans mémoire.

(ii) Réciproquement, montrer que toute variable à valeur dans $\mathbb{N}$ sans mémoire suit une loi géométrique.

Correction. — Reformuler l'exercice sur $\mathbb{N}^*$.

Exercice 2.8 (conditionnement par la somme). — Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de lois binomiales de paramètres respectifs (n_1, p) et (n_2, p).

(i) Déterminer la loi de X_1 sachant $\{X_1 + X_2 = n\}$.

(ii) Déterminer $\mathbb{E}[X_1 \,|\, X_1 + X_2]$.

(iii) Mêmes questions si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1, λ_2.

Exercice 2.9 (question de cours, cas de variables à densité). — Soit X et Y des variables aléatoires dont la loi conjointe admet une densité $f_{(X,Y)}$. On note f_X et f_Y les densités des lois marginales de X et Y. On définit

$$f_{X\,|\,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} & \text{si } f_Y(y) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit h une fonction borélienne sur $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}[|h(X)|] < 1$. Posons $g(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X\,|\,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x$.

(i) Montrer que $g(Y)$ est une version de $\mathbb{E}[h(X) \,|\, Y]$.

(ii) Expliciter la loi conditionnelle de X sachant Y.

Exercice 2.10 (conditionnement par la somme). — Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de loi exponentielle de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Déterminer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2$.

Exercice 2.11 (conditionnement par la somme, cas gaussien). — Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$.

(i) Déterminer la loi du couple (X_1, S) où $S = X_1 + X_2$.

(ii) Determiner la loi conditionnelle de X_1 sachant $\{S = s\}$ ainsi que l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X_1 \,|\, S]$.

Exercice 2.12 (variables sans mémoire II). — Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(i) Montrer que pour tout $s, t \geqslant 0$ on a $\mathbb{P}\{T > t + s \,|\, T > t\} = \mathbb{P}\{T > s\}$.

(ii) Montrer que cette propriété caractérise les lois exponentielles parmi toutes les lois à densité sur $\mathbb{R}_+$.