Travaux dirigés iL01 : Mathématiques Discrètes, Feuille 8 vendredi 2 décembre 2005

1. Montrer qu'un graphe G avec $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et matrice de contiguïté A contient un triangle (un sous-graphe isomorphe à C_3) si et seulement si il existe $i, j \in [n]$ tel que $A_{i,j} = 1$ et $(A^2)_{i,j} > 0$.

2. Soit G un graphe connexe non vide qui ne contient pas de cycles de longueur impaire (aucun sous-graphe de G n'est isomorphe à C_{2i+1} pour $i \geq 1$.) Montrer que G est bipartite (c'est-à-dire on peut écrire $V(G) = V_0 \cup V_1$ pour certains V_0, V_1 avec $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ et $E(G) \subseteq \{ \{a, b\} \mid a \in V_0, b \in V_1 \}$).

3. Soit A la matrice de contiguïté d'un graphe G avec $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

a. Montrer que, avec I_n la matrice identité de taille n, le coefficient i, j de la matrice $(A + I_n)^l$, qu'on notera $c_{i,j}^{(l)}$, est le nombre de suites $w_0, \ldots, w_l$ telle que $w_0 = v_i$, $w_l = v_j$ et pour tout $k \in [i]$ soit $w_i = w_{i-1}$ soit $\{w_{k-1}, w_k\} \in E(G)$ (c'est-à-dire le nombre de promenades dans G de v_i vers v_j de longueur l, ou on donne le droit à chaque étape de rester au même sommet au lieu d'aller à un voisin).

b. Montrer que la suite $(c_{i,j}^{(l)})_{l \in \mathbf{N}}$ est faiblement croissante pour tout $i, j \in [n]$.

c. Montrer que cette suite est non nulle si et seulement si v_i et v_j sont dans la même composante connexe, et que dans ce cas $\min \{ l \in \mathbf{N} \mid c_{i,j}^{(l)} > 0 \}$ est la distance $d_G(v_i, v_j)$.

d. Montrer que G est connexe si et seulement si $(A + I_n)^{n-1}$ n'a aucun coefficient nul.

4. Un arbre est un graphe connexe qui ne contient pas de cycles (sous-graphes isomorphe à C_n, $n \geq 3$).

a. Énumérer tous les arbres G avec $V(G) = [1, 4]$.

b. Énumérer les classes d'isomorphisme des arbres avec 6 sommets, en donnant un représentant de chaque classe.

5. Un graphe $G = (V, E)$ vérifie $\#V = n$ et il possède c composantes connexes ; montrer que $\#E \geq n - c$.