Examen Géométrie Élémentaire (L2) mercredi 11 mai 2016
14h-16h

Les parties sont indépendantes. Pour les question où on ne demande pas de montrer/justifier/expliquer, une simple réponse peut suffire.

1. Dans un plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (donc en particulier $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme une base *orthonormée* de l'espace $\overrightarrow{\mathcal{P}}$) on fixe les points A, B de coordonnées $(2, 3)$ respectivement $(-4, 11)$ par rapport à $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $P \in \mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = -12$.

a. Donner une équation de $\mathcal{C}$ en termes des coordonnées (x, y) des points $P \in \mathcal{C}$.

b. En déduire que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on détaillera le centre et le rayon.

2. On considère un plan affine $\mathcal{P}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $\mathcal{O}'$ le point de coordonnées $(5, -8)$ par rapport à $\mathcal{R}$, et soient $\vec{u} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, et $\vec{v} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

a. Montrer que $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{u}, \vec{v})$ est un autre repère cartésien.

b. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ du point P dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(2, -1)$.

c. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ du point Q dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont $(3, -4)$.

d. On désigne par $x, y \in \mathbf{R}$ les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ d'un point P du plan (on a donc $P = (x, y)_{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O} + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$), et par x', y' ses coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ (donc $P = (x', y')_{\mathcal{R}'}$). Soit $\mathcal{D} = \{ (x, y)_{\mathcal{R}} \mid 2x + y + 7 = 0 \}$, une droite donnée par rapport à $\mathcal{R}$ par l'équation $2x + y + 7 = 0$. Donner une équation pour cette droite $\mathcal{D}$ par rapport à $\mathcal{R}'$, donc en termes de x', y'.

3. On considère un triangle aux sommets A, B, C dans un plan affine $\mathcal{P}$. Le triangle est un repère affine dans $\mathcal{P}$, et on considère trois points P, Q, R dont les coordonnées barycentriques sont respectivement $(0, \lambda, 1 - \lambda)$, $(1 - \mu, 0, \mu)$, et $(\nu, 1 - \nu, 0)$, pour certaines valeurs $\lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$.

a. Expliquer pourquoi P est situé sur la droite (BC), et que tout point de cette droite peut être obtenu comme P pour un choix convenable de λ. (Par un argument similaire qu'on ne demande pas de répéter, Q est un point de la droite (AC), et R est un point de (AB).)

b. Donner une condition en termes de λ, μ, ν qui correspond au fait que P, Q, R sont alignés.

c. En déduire que si aucun des points P, Q, R n'est confondu avec un sommet du triangle, alors P, Q, R sont alignés si est seulement si le produit $\frac{\lambda}{1-\lambda} \times \frac{\mu}{1-\mu} \times \frac{\nu}{1-\nu}$ vaut -1.

4. Soit $\mathcal{P}$ un plan euclidien, muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. En termes des coordonnées (x, y) par rapport à $\mathcal{R}$, on définit une droite $\mathcal{D}_1$ dans $\mathcal{P}$ par l'équation $12x - 5y = -18$.

a. Donner une expression pour la distance d'un point $(x, y)_{\mathcal{R}}$ du plan $\mathcal{P}$ à la droite $\mathcal{D}_1$. [Indication : cette expression doit avoir la valeur 0 pour tout point qui vérifie l'équation de $\mathcal{D}_1$. Et n'oubliez pas que la distance est toujours un nombre positif.]

b. La distance d'un point $(x, y)_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{P}$ à une autre droite $\mathcal{D}_2$ de $\mathcal{P}$ est donnée par l'expression $|\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{14}{5}|$. Décrire l'ensemble des points qui ont la même distance à $\mathcal{D}_1$ qu'à $\mathcal{D}_2$.

c. On rappelle que pour une droite donnée $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$, la réflexion (orthogonale) par rapport à $\mathcal{D}$ est une isométrie $r : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui envoie un point $Q \in \mathcal{P}$ vers le point $r(Q)$ tel que le milieu $M = \text{bar}(Q, r(Q))$ du segment $[Q, r(Q)]$ soit la projection orthogonale $\pi(Q)$ du point Q sur $\mathcal{D}$ (en formule on aura $r(Q) = M - \overrightarrow{MQ} = Q - 2\overrightarrow{MQ}$, où $M = \pi(Q)$). Décrire une droite $\mathcal{D}$ telle que l'image par la réflexion dans $\mathcal{D}$ de la droite $\mathcal{D}_1$ soit égale à $\mathcal{D}_2$. [Indication : il y a deux telles réflexions ; en choisir une. On pourra utiliser question précédente.]

5. Dans un plan euclidien on considère trois droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ dont aucune paire n'est parallèle (mais elles peuvent être concourantes, c'est-à-dire passer tous les 3 par un même point), et la composée $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ des réflexions r_i correspondantes (r_i est la réflexion orthogonale par rapport à la droite $\mathcal{D}_i$).

a. Argumenter que cette composée est une isométrie indirecte de $\mathcal{P}$.

b. D'après la classification des isométries, il s'agit donc soit d'une réflexion, soit d'un réflexion glissée. Montrer que si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont concourantes, alors $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ est une réflexion.

c. Dans ce cas, donner une description géométrique de la droite qui est l'axe de cette réflexion.

[Les questions restantes sont hors barème]

d. Montrer que si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ ne sont pas concourantes, alors $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ est une réflexion glissée.

e. Dans ce cas décrire une réflexion r et une translation t telles que $r_3 \circ r_2 \circ r_1 = r \circ t$.

Fin.