

Les quatre parties sont indépendantes

1. On considère un espace \mathcal{E} de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit \mathcal{O}' le point de coordonnées $(1, 2, -1)$ par rapport à \mathcal{R} , et soient $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$, et $\vec{w} = \vec{j} - 2\vec{k}$. Alors $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un autre repère cartésien de \mathcal{E} (on l'admet).
 - a. Donner les coordonnées par rapport à \mathcal{R} du point P dont les coordonnées par rapport au repère \mathcal{R}' sont $(2, -1, 3)$.
 - b. Donner les coordonnées par rapport à \mathcal{R}' du point Q dont les coordonnées par rapport au repère \mathcal{R} sont $(3, 3, -4)$.

2. Soient A, B, C, D quatre points du plan \mathcal{P} . On définit $I = \text{bar}(A, B)$, le point au milieu du segment $[A, B]$ (barycentre avec poids 1), et pareillement $J = \text{bar}(B, C)$, $K = \text{bar}(C, D)$, et $L = \text{bar}(D, A)$. On suppose que tous ces points sont distincts.
 - a. Montrer que le vecteur \vec{IJ} est un multiple du vecteur \vec{AC} , par un facteur qu'on détaillera.
 - b. En déduire que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

3. Dans le plan euclidien \mathcal{P} muni d'un repère euclidien $(\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$, soient A, B les points de coordonnées $(-2, 4)$ respectivement $(4, -6)$ par rapport à ce repère.
 - a. Déterminer une équation pour l'ensemble $\mathcal{C} = \{P \in \mathcal{P} \mid \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0\}$ (dans cette expression le point désigne le produit scalaire).
 - b. Montrer que \mathcal{C} est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

4. Dans le plan euclidien \mathcal{P} , la distance d'un point P à une droite \mathcal{D} est définie comme la distance \overline{PQ} où $Q \in \mathcal{D}$ est l'unique point de \mathcal{D} tel que le vecteur \vec{PQ} soit orthogonal à la direction \vec{D} de la droite.
 - a. Si $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère euclidien, déterminer la distance entre le point P de coordonnées $(-5, 3)$ et la droite \mathcal{D} dont l'équation en terme des coordonnées (x, y) de ses points est $3x - y = 2$.
 - b. On considère maintenant plus généralement une droite \mathcal{D} d'équation $ax + by = c$ pour $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ est un vecteur normal pour \mathcal{D} (on l'admet). Argumenter que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ les points de la droite translatée $\mathcal{D}' = \mathcal{D} + \lambda\vec{n}$ (c'est par définition $\{A + \lambda\vec{n} \mid A \in \mathcal{D}\}$) ont tous une distance $\|\lambda\vec{n}\|$ à la droite \mathcal{D} .
[Les questions restantes sont hors barème]
 - c. Montrer que cette droite \mathcal{D}' est donnée par une équation de la forme $ax + by = c'$ pour une constante c' qu'on précisera.
 - d. En déduire que la distance à la droite \mathcal{D} d'un point de coordonnées (x, y) ne dépend que de la valeur de l'expression $ax + by$ (un nombre réel), et donner une formule qui décrit explicitement cette distance en fonction de $ax + by$.