Corrigé Contrôle continu Géométrie Élémentaire (L2) lundi 7 mars
8h30-9h30

1. On considère un espace $\mathcal{E}$ de dimension 3 muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{O}'$ le point de coordonnées $(1, 2, -1)$ par rapport à $\mathcal{R}$, et soient $\vec{u} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{v} = \vec{\imath} + \vec{k}$, et $\vec{w} = \vec{\jmath} - 2\vec{k}$. Alors $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un autre repère cartésien de $\mathcal{E}$ (on l'admet).

a. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ du point P dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(2, -1, 3)$.

$\surd$ $(1, 2, -1) + 2(1, 1, 0) + -1(1, 0, 1) + 3(0, 1, -2) = (2, 7, -8)$

b. Donner les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}'$ du point Q dont les coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$ sont $(3, 3, -4)$.

$\surd$ *Il s'agit de trouver a, b, c tels que $(1, 2, -1)+a(1, 1, 0)+b(1, 0, 1)+c(0, 1, -2) = (3, 3, -4)$, ou de façon équivalente $a(1, 1, 0) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, -2) = (2, 1, -3)$. En résolvant le système correspondant à cette équation on trouve $(a, b, c) = (-3, 5, 4)$.*

2. Soient A, B, C, D quatre points du plan $\mathcal{P}$. On définit $I = \mathrm{bar}(A, B)$, le point au milieu du segment $[A, B]$ (barycentre avec poids 1), et pareillement $J = \mathrm{bar}(B, C)$, $K = \mathrm{bar}(C, D)$, et $L = \mathrm{bar}(D, A)$. On suppose que tous ces points sont distincts.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est un multiple du vecteur $\overrightarrow{AC}$, par un facteur qu'on détaillera.

b. En déduire que le quadrilatère $IJKL$ est un parallélogramme.

3. Dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère euclidien $(\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, soient A, B les points de coordonnées $(-2, 4)$ respectivement $(4, -6)$ par rapport à ce repère.

a. Déterminer une équation pour l'ensemble $\mathcal{C} = \{\, P \in \mathcal{P} \mid \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \,\}$ (dans cette expression le point désigne le produit scalaire).

$\surd$ *L'équation $(\binom{x}{y} - \binom{-2}{4}) \cdot (\binom{x}{y} - \binom{4}{-6}) = 0$ donne $x^2 - 2x + y^2 + 2y - 32 = 0$.*

b. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.

$\surd$ *Sous la forme $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 34$ il est clair qu'il s'agit d'un cercle de centre $(1, -1)$ (par rapport au repère) et de rayon $\sqrt{34}$.*

4. Dans le plan euclidien $\mathcal{P}$, la distance d'un point P à une droite $\mathcal{D}$ est définie comme la distance $\overline{PQ}$ où $Q \in \mathcal{D}$ est l'unique point de $\mathcal{D}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ soit orthogonal à la direction $\vec{\mathcal{D}}$ de la droite.

a. Si $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère euclidien, déterminer la distance entre le point P de coordonnées $(-5, 3)$ et la droite $\mathcal{D}$ dont l'équation en terme des coordonnées (x, y) de ses points est $3x - y = 2$.

$\surd$ *Si le point $Q \in \mathcal{D}$ de la description ci-dessus a coordonnées $\binom{x}{y}$, alors on a les équations $3x - y = 2$ et $\binom{x+5}{y-3} \cdot \binom{1}{3} = 0$ (où $\binom{1}{3}$ est un vecteur dans la direction $\vec{\mathcal{D}}$ de la droite), ce qui donne $x + 3y = 4$. La solution des deux équations est $(x, y) = (1, 1)$, et la distance $\overline{PQ}$ est $\sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.*

b. On considère maintenant plus généralement une droite $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by = c$ pour $a, b, c \in \mathbf{R}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et un vecteur normal pour $\mathcal{D}$ (on l'admet). Argumenter que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ les points de la droite translatée $\mathcal{D}' = \mathcal{D} + \lambda\vec{n}$ (c'est par définition $\{\, A + \lambda\vec{n} \mid A \in \mathcal{D} \,\}$) ont tous une distance $\|\lambda\vec{n}\|$ à la droite $\mathcal{D}$.

[Les questions restantes sont hors barème]

c. Montrer que cette droite $\mathcal{D}'$ est donnée par une équation de la forme $ax + by = c'$ pour une constante c' qu'on précisera.

$\surd$ *Si $(x', y') = (x, y)+\lambda(a, b)$ sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{D}'$, avec $ax+by = c$, alors $ax' + by' = a(x + \lambda a) + b(y + \lambda b) = ax + by + \lambda(a^2 + b^2) = c + \lambda(a^2 + b^2)$, donc pour $c' = c + \lambda(a^2 + b^2)$ c'est bien la forme cherchée pour l'équation de $\mathcal{D}'$.*

d. En déduire que la distance à la droite $\mathcal{D}$ d'un point de coordonnées (x, y) ne dépend que de la valeur de l'expression $ax + by$ (un nombre réel), et donner une formule qui décrit explicitement cette distance en fonction de $ax + by$.

$\surd$ *Un point P de coordonnées (x_P, y_P) se trouve sur la droite d'équation $ax + by = c'$ pour $c' = ax_P + by_P$ et on a vue que pour un tel c' fixé, tous les point de cette droite ont la même distance à la droite $\mathcal{D}$. Cette distance est $\|\lambda\vec{n}\| = |\lambda|\sqrt{a^2 + b^2}$ où λ est tel que $c' = c + \lambda(a^2 + b^2)$. On résout cette équation, donnent $\lambda = \frac{ax_P+by_P-c}{a^2+b^2}$, et la distance est $|\frac{ax_P+by_P-c}{a^2+b^2}|\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|ax_P+by_P-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.*

Fin.