Examen Espaces euclidiens et hermitiens mercredi 15 mai 2019
8h30–11h30

L'utilisation de documents ou de tout appareil électronique est interdite. Dans vos réponses aux questions autres que la question de cours, vous pouvez citer et utiliser sans démonstration tout résultat du cours ou des TD. Les 5 parties sont indépendantes.

1. *Question de cours.* Dans cette question portant sur les formes quadratiques, vous pouvez supposer les notions introduites dans le chapitre 1 (espaces euclidiens) comme connues. Vous pouvez donc utiliser ces notions sans détailler leur définition.

a. Donner la définition d'une forme quadratique sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E.

b. Pour une forme quadratique Q donnée, donner une formule de polarisation (qui exprime les valeurs de sa forme polaire φ en termes de celles de Q), ainsi que sa démonstration.

2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$$

a. Argumenter sans calcul qu'il existe dans $\mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ une matrice *diagonale* D et une matrice *orthogonale* P telles que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

b. Calculer et factoriser (dans $\mathbf{R}[X]$) le polynôme caractéristique χ_A de A.

c. Déterminer des matrices D, P telles que décrites dans la question *a.*

3. On considère dans $\mathbf{R}^3$, muni de sa structure habituelle l'espace euclidien et orienté de telle façon que la base canonique est directe, l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est
$$R = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que f est une rotation.

b. Déterminer les éléments caractéristiques de f (axe, et angle orienté par rapport à une orientation qu'on spécifiera).

4. Soit E un espace euclidien de dimension finie $n > 0$. Pour $v \in E \setminus \{0\}$, on définit $\sigma_v \in \mathrm{End}(E)$ par $\sigma_v(w) = w - 2\frac{(v|w)}{(v|v)}v$; c'est la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $v^\perp$.

a. Montrer que σ_v est une involution (c'est-à-dire, que σ_v est son propre inverse).

b. Rappeler pourquoi (ou montrer par votre propre argumentation que) σ_v est à la fois un endomorphisme symétrique et un endomorphisme orthogonal de E.

On fixe deux vecteurs non nuls $u, v \in E$, et on forme la composée $\phi = \sigma_u \circ \sigma_v$.

c. Montrer que ϕ est toujours un endomorphisme orthogonal.

d. Montrer que ϕ est un endomorphisme symétrique si et seulement si $\sigma_u \circ \sigma_v = \sigma_v \circ \sigma_u$.

 sujet continué au verso

5. Sur l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^4$ on définit la forme quadratique $Q : E \to \mathbf{R}$ en coordonnées par rapport à la base canonique par

$$Q((x, y, z, t)) = 2x^2 + 2xy - 6xz + yt + zt - \frac{1}{2}t^2$$

pour tout $x, y, z, t \in \mathbf{R}$.

a. Donner la matrice de la forme polaire φ de Q dans la base canonique.

b. Déterminer le rang r et la signature (s, t) de Q, en appliquant l'algorithme de Gauss.

c. Donner une expression de Q comme somme de r termes, chacun formé d'un scalaire réel non nul fois le carré d'une forme linéaire. (L'algorithme de Gauss fournit déjà cette information ; les r formes linéaires concernées seront linéairement indépendantes.)

Fin.