

Les documents sont interdits, l'utilisation d'une calculatrice autorisée.

1. Pour chaque point ci-dessous répondre par A, B, C, ou D. Une motivation n'est pas demandée ; une bonne réponse contient une et une seule de ces lettres.

Pour les points a à e cette lettre signifie que, pour les ensembles X, Y mentionnés

A : $X = Y$,

B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),

C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),

D : aucune de ces trois possibilités s'applique, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$ ».

a. $X = \{0, 9, 1, 1, 4, 0\}$ et $Y = \{k^2 \mid k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}\}$.

b. $X = \{\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$, et $Y = \{\{0, 3\}, \{4, 1\}, \{2, 5\}\}$.

c. $X = \{0, 1, 2\}$ et $Y = f^{-1}[\{0, 1, 2, 3, 4\}]$ (une image réciproque) où $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ est défini par $f(k) = k^2$.

d. $X = \{\{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}, \{2n + 1 \mid n \in \mathbf{Z}\}\}$ et $Y = \{\{2n + r \mid n \in \mathbf{Z}\} \mid r \in \mathbf{Z}\}$

e. $X = \mathcal{P}(\{1, 2\})$ (l'ensemble des parties de $\{1, 2\}$), et $Y = \{\{2\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{2, 1\}\}$

Pour les points f et g , on donne chaque fois une relation entre $k, l \in \mathbf{Z}$; indiquer si cette relation est

A : symétrique et transitive,

B : symétrique mais pas transitive,

C : anti-symétrique et transitive,

D : aucune de ces trois possibilités s'applique

f. La relation « $k - l < 0$ »

g. La relation « $k + l = 12$ »

2. Dans chacun des descriptions suivantes, donner le nombre de valeurs/objets du type spécifié.

a. Les monômes de degré 9 en les 4 variables w, x, y, z (par exemple w^2x^5yz ou $w^4x^3z^2$).

b. Comités de 4 membres, choisis parmi un group de 13 personnes.

c. Classements (listes ordonnées) de 3 gagnants, dans une compétition avec 20 participants.

d. Glaces à 4 boules, choisies parmi 11 parfums (on peut avoir plusieurs boules identiques).

e. Les mots de longueur 11 qui contiennent 7 lettres A et 4 lettres B.

f. Les évolutions du score dans un match qui se termine sur un score de $5-4$ (une telle évolution est $[(0, 0); (0, 1); (0, 2); (1, 2); (2, 2), (3, 2), (4, 2); (4, 3); (5, 3); (5, 4)]$, où un score $a - b$ est écrit (a, b)).

g. Les $(a_1, \dots, a_6) \in \mathbf{N}^6$ avec $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_6 \leq 15$ (N.B.: croissance stricte).

h. Les $(a_1, \dots, a_5) \in \mathbf{N}^5$ avec $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_5 \leq 10$ (N.B.: croissance faible).

3. Dans cette question on prend $[n] = \{i \in \mathbf{N} \mid i < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ comme ensemble à n éléments. On sait que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ compte le nombre de parties de $[n]$ à k éléments, c'est-à-dire l'ensemble $\binom{[n]}{k} = \{P \subseteq [n] \mid \#P = k\}$.

a. On fixe $n, k \in \mathbf{N}$, et on considère l'application $f : \binom{[n]}{k+1} \rightarrow [n]$ définie par $f(P) = \max(P)$ (par exemple pour $n = 8, k = 2$ et $P = \{0, 2, 6\} \in \binom{[8]}{3}$ on a $f(P) = 6$). Pourquoi f est bien défini ?

Les "fibres" de f sont $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_{n-1}$, où $\mathcal{F}_i = \{P \in \binom{[n]}{k+1} \mid f(P) = i\}$. On rappelle que les fibres d'une application sont toujours disjointes (c'est-à-dire $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset$ si $i \neq j$), et que leur réunion est égale au domaine de l'application, ici $\mathcal{F}_0 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{n-1} = \binom{[n]}{k+1}$.

b. Il est clair de la définition de f que si P appartient à la fibre \mathcal{F}_i , alors $P = P' \cup \{i\}$ avec tous les éléments l de P' vérifiant $l < i$. En déduire un formule pour le nombre $\#\mathcal{F}_i$.

c. Quelles de ces fibres sont vides, c'est-à-dire pour quels $i \in [n]$ a-t-on $\mathcal{F}_i = \emptyset$?

d. Déduire des réponses aux questions b, c, l'identité

$$\binom{n}{k+1} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{i}{k} \quad \text{pour tout } n, k \in \mathbf{N} \text{ avec } n \geq k$$

(par exemple, pour $n = 8$ et $k = 2$ elle dit que $\binom{8}{3} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2}$).

- e. Donner une autre preuve de cette identité ainsi : on fixe $k \in \mathbf{N}$ et on montre le résultat pour tout $n \geq k$ par récurrence sur n .

Fin.