Corrigé Examen terminal Combinatoire (L2) jeudi 21 juin 2018
14h00-16h00

1. Dans chaque point ci-dessous on décrit deux ensembles X, Y. Chaque fois indiquer par A, B, C, ou D laquelle des situations suivantes se produit :
A : $X = Y$,
B : $X \subset Y$ (c'est-à-dire $X \subseteq Y$ mais $X \neq Y$),
C : $X \supset Y$, (c'est-à-dire $X \supseteq Y$ mais $X \neq Y$),
D : aucun des trois précédents, ce qui équivaut à «on n'a ni $X \subseteq Y$ ni $X \supseteq Y$».

Ces possibilités étant mutuellement exclusives, toute réponse qui consiste à choisir plus d'une seule option est fausse. Il n'est pas demandé de motiver vos réponses.

a. $X = \{\, \{k, \frac{36}{k}\} \mid k \in \mathbf{N}$ et k divise $36 \,\}$, et $Y = \{\{3, 12\}, \{6\}, \{1, 36\}, \{18, 2\}, \{9, 4\}\}$.

$\surd$ $X = \{\{1, 36\}, \{2, 18\}, \{3, 12\}, \{4, 0\}, \{6, 6\}, \{9, 4\}, \{12, 3\}, \{18, 2\}, \{36, 1\}\}$ *ce qui en enlevant les doublures est égal à* $\{\{1, 36\}, \{2, 18\}, \{3, 12\}, \{9, 4\}, \{6\}\} = Y$. *Réponse A.*

b. $X = \{\, (x, x^2) \mid x \in \mathbf{R} \,\}$ et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < y \,\}$.

$\surd$ *Aucune inclusion, par exemple* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \in X - Y$ *et* $(1, 3) \in Y - X$, *donc D.*

c. $X = \{\, (x, \sqrt{1 - x^2}) \mid -1 \leq x \leq 1 \,\}$ et $Y = \{\, (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$.

$\surd$ *On a toujours* $x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = x^2 + 1 - x^2 1$, *donc* $X \subseteq Y$, *mais par exemple* $(0, -1) \in Y - X$ *donc* $X \subset y$, *réponse B*

d. $X = \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} - \{0 + 5\mathbf{Z}\}$ (c'est-à-dire $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ privé de la classe de 0) et $Y = \{\, 2^k + 5\mathbf{Z} \mid k \in \mathbf{N} \,\}$ (la partie de $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$ formée des classes des puissances de 2).

$\surd$ *Les puissances* $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$ *et* $2^3 = 8 \equiv 3$ *épuisent déjà les* 4 *classes modulo* 5 *autres que celle de* 0, *donc* $Y \supseteq X$. *Or aucune des (autres) puissances de* 2 *n'est divisible par* 5, *donc leurs classes sont parmi les éléments de* X, *autrement dit* $Y \subseteq X$. *En conclusion* $X = Y$, *réponse A.*

e. $X = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et $Y = f^{-1}(A \cap B)$ (ici $f^{-1}(S)$ désigne l'image réciproque de l'ensemble S par f), où $A = [-2, 4]$ et $B = [1, 7]$ sont des intervalles de $\mathbf{R}$, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4$.

$\surd$ *On a toujours* $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \{\, x \mid f(x) \in A$ et $f(x) \in B \,\} = f^{-1}(A \cap B)$, *donc A.*

2. Dans chacun des descriptions suivantes, donner le nombre de valeurs ou objets du type spécifié.

a. Les mots (chaînes de lettres) de longueur 15 qui contiennent 9 lettres A et 6 lettres B.

$\surd$ *Le nombre de choix pour les positions des «A» :* $\binom{15}{9} = 5005$.

b. Les chemins de réseau menant du point $(1, 2)$ vers $(7, 12)$

$\surd$ *Par translation, c'est aussi le nombre de chemins de réseau de* $(0, 0)$ *vers* $(6, 10)$, *soit* $\binom{6+10}{6} = \binom{16}{6} = 8008$.

c. Façons de composer une glace à 3 boules, choisies parmi 20 parfums (on peut avoir plusieurs boules identiques).

$\surd$ *Le nombre de choix de* 3 *parmi* 16 *avec répétitions, soit* $\binom{20+3-1}{3} = \binom{22}{3} = 1540$.

d. Classements (c'est-à-dire listes ordonnées) de 4 noms, choisis parmi 17 candidats.

$\surd$ *C'est* $17^{\underline{4}} = 17 \times 16 \times 15 \times 14 = 57120$.

e. Les monômes de degré 8 en les 4 variables w, x, y, z (par exemple w^2xyz^4 ou w^5y^3).

$\surd$ *Le nombre de choix de* 7 *parmi* 6 *avec répétitions, soit* $\binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8} = \binom{11}{3} = 165$.

3. Dans un jeu de 52 cartes, avec 4 « couleurs » et 13 « valeurs » pour chaque couleur, on sélectionne une « main » de 4 cartes ; l'ordre des cartes dans une main est ignoré.

a. Combien de mains différentes y a-t-il ?

$\surd$ $\binom{52}{4}$, *qui vaut* 270725

b. Parmi ces mains, quel est le nombre de mains dont les cartes ont 4 valeurs distinctes ?

$\surd$ *On peut choisir les* 4 *valeurs de* $\binom{13}{4} = 715$ *manières, et pour chaque choix on peut attribuer des couleurs aux valeurs de* $4^4 = 256$ *manières. Au total on a* $715 \times 256 = 183040$ *mains.*

c. Quelle est la probabilité qu'une main choisie au hasard (avec probabilité uniforme) contienne une carte de chacune des 4 *couleurs* ?

$\surd$ *Une telle main est déterminée par les valeurs choisies pour chacune des* 4 *couleurs, pour un nombre de* $13^4 = 28561$ *possibilités. La probabilité est* $\frac{28561}{270725} = \frac{2197}{20825} \approx 0{,}1055$.

d. Argumenter sans calcul détaillé que la probabilité d'avoir 4 couleurs distinctes (c'est celle de la question précédente) n'est par indépendante des valeurs des cartes dans la main (il suffit de trouver un évènement particulier, formulé en termes de seulement ces valeurs, qui n'est pas indépendant de l'évènement d'avoir 4 couleurs distinctes).

$\surd$ *Le plus simple est de prendre l'évènement que les* 4 *valeurs sont identiques ; puisque c'est possible seulement si les* 4 *couleurs sont distinctes, la probabilité conditionnelle relative à cet évènement (donc sachant que les valeurs sont identiques) est* 1, *et non pas* 0,1055. *Cela montre que les deux évènements ne sont pas indépendants.*

e. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'une main choisie au hasard (avec probabilité uniforme) contienne une carte de chacune des 4 couleurs, sachant qu'elle montre 4 valeurs distinctes ?

$\surd$ *En plus du résultat de la question b, il faudra calculer le nombre de mains avec* 4 *valeurs distinctes et avec* 4 *couleurs distinctes. Ce nombre est* $13^{\underline{4}} = 13 \times 12 \times 11 \times 10 = 17160$, *car en ordonnant les couleurs il s'agit de choisir un arrangement de 4 parmi* 13 *: on peut choisir la valeur de la carte de la première couleur de 13 manières, ensuite de celle de la seconde couleur de* 12 *manières, etc. La probabilité conditionnelle est* $17160/(\binom{13}{4}.4^4) = 3/32 \approx 0.0938$. *Alternativement on peut calculer ce nombre ensuite. On fixe d'abord le choix des* 4 *valeurs distinctes ; quel que soit ce choix il assure la validité de la condition (*4 *valeurs distinctes) donc la probabilité conditionnelle devient une probabilité simple, et cette probabilité sera indépendante du choix des* 4 *valeurs distinctes. La probabilité cherchée est celle de trouver* 4 *couleurs distinctes en choisissant* 4 *fois indépendamment une couleur parmi* 4 *(une fois pour chaque valeur retenue), qui est* $4!/4^4 = 24/256 = 3/32$.

4. Pour deux évènements A, B définis sur une espace probabilisé, il est donné que $\Pr(A) = 0{,}7$, que $\Pr(B) = 0{,}4$ et que $\Pr(A \mid B) = 0{,}7$. Calculer la probabilité $\Pr(A^c \cap B^c)$ qui ni A ni B se produise (ici A^c désigne l'événement complémentaire de A). Est-ce que A et B sont des évènements indépendants ?

$\surd$ *Puisque* $\Pr(A \mid B) = \Pr(A \cap B)/\Pr(B)$ *on trouve* $\Pr(A \cap B) = \Pr(A \mid B)\Pr(B) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$. *Ensuite* $\Pr(A \cap B^c) = \Pr(A) - \Pr(A \cap B) = 0{,}7 - 0{,}28 = 0{,}42$, *et pareillement* $\Pr(A^c \cap B) = 0{,}12$, *et il reste* $\Pr(A^c \cap B^c) = 1 - 0{,}28 - 0{,}42 - 0{,}12 = 0{,}18$. *Et A et B sont indépendants car* $\Pr(A \mid B) = \Pr(A)$. *Alternativement on aurait pu commencer avec le constat de cette indépendance, ce qui permet de calculer par multiplication* $\Pr(A^c \cap B^c) = \Pr(A^c)\Pr(B^c) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$.

5. On considère une variable aléatoire X dont la loi est la suivante ; elle prend l'une des valeurs $0, 1, 2, 3, 4$, avec probabilités respectivement (0): 0,0016, (1): 0,0256, (2): 0,1536, (3): 0,4096, et (4): 0,4096. Calculer pour X : l'espérance $\mathbf{E}(X)$, la variance $\mathrm{Var}(X)$, et l'écart-type $\sigma(X)$.

$\surd$ *La somme de ces probabilités est effectivement* 1,000, *comme il se doit. On a* $\mathbf{E}(X) = \sum_i \Pr(X = i)i = 0 + 0{,}0256 + 0{,}3072 + 1{,}2288 + 1{,}6384 = 3{,}200$ *et* $\mathrm{Var}(X) = \sum_i \Pr(X = i)(i - \mathbf{E}(X))^2 = 0{,}016384 + 0{,}123904 + 0{,}221184 + = 0{,}016384 + 0{,}262144 = 0{,}640000$. *Finalement* $\sigma(X) = \sqrt{0{,}64} = {,}8$.

Fin.