Corrigé Examen terminal (seconde session) Combinatoire (L2) jeudi 18 juin 2015
14h00-16h00

1. Déterminer le cardinal (nombre d'éléments) de chacun des ensembles suivants.

a. L'ensemble des sous-ensembles (parties) à 4 lettres de l'alphabet A (qui en contient 26) ; c'est formellement l'ensemble $\{\, S \in \mathcal{P}(A) \mid \#S = 4 \,\}$.

$\surd$ *Par son interprétation usuelle ce nombre est le coefficient binomial* $\binom{26}{4}$*, dont la valeur explicite est* $\frac{26\times25\times24\times23}{4!} = 26 \times 25 \times 23 = 14950$.

b. $\{\, (a,b,c,d,e) \mid a,b,c,d,e \in \mathbf{N}^* : a+b+c+d+e = 13 \,\}$ (on rappelle que $\mathbf{N}^* = \{1,2,3\ldots\}$).

$\surd$ *Comme chaque variable est au moins égal à* 1*, on peut par exemple aligner* 13 *objets, et choisir* 4 *de* 12 *espaces entre les objets pour y mettre une séparation, et prendre pour* a,b,c,d,e *les tailles des* 5 *groupes ainsi formés. Alors le nombre cherché est* $\binom{12}{4} = \frac{12\times11\times10\times9}{4!} = 11 \times 5 \times 9 = 495$.

c. L'ensemble des applications strictement croissantes $f : [4] \to [14]$, où $[n]$ désigne l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ (on rappelle que f est strictement croissante si $x < y$ entraîne $f(x) < f(y)$).

$\surd$ *Une telle application détermine évidemment son image, qui est un sous-ensemble de cardinal* 4 *de* $[14]$*; mais elle est aussi déterminée, car les valeurs du sous-ensemble doivent être "utilisé" en ordre croissant. Le nombre est* $\binom{14}{4} = \frac{14\times13\times12\times11}{4!} = 7 \times 13 \times 11 = 1001$.

d. Avec la même notation, les parties à 4 nombres de $[10]$ qui contiennent au moins un nombre ≤ 5 ; c'est formellement l'ensemble $\{\, S \in \mathcal{P}([10]) \mid \#S = 4,\ S \cap [5] \neq \emptyset \,\}$.

$\surd$ *Ici il faut retirer de la totalité des* $\binom{10}{4}$ *parties de* $[10]$ *les* $\binom{5}{4}$ *parties de* $[10] \setminus [5] = \{6,7,8,9,10\}$ *(pour lesquels l'intersection mentionnée est vide) ; le résultat est* $\binom{10}{4} - \binom{5}{4} = 210 - 5 = 205$.

e. L'ensemble des possibilités pour enfiler 6 perles noires et 11 perles blanches sur un fil, en veillant à ce que chaque paire de perles noires soit sépéarée par au moins une perle blanche.

$\surd$ *C'est une variation de la question b, avec les perles blanches comme les objets, laissant* 10 *espaces entre eux, mais aussi* 2 *aux bouts, et parmi ces places on peut sélectionner* 6 *pourles perles noires.*

2. Une urne contient 18 boules, numérotées de 1 à 18. Les 6 boules $3,6,9,12,15,18$ dont le numéro est divisible par 3 sont de couleur jaune, les 6 boules $1,4,7,10,13,16$ dont le numéro laisse un reste 1 après division par 3 sont de couleur rouge, et les 6 boules restantes sont de couleur bleue. On prend au hasard un échantillon de 5 boules. Soit B l'ensemble des 18 boules, et $\Omega = \{\, E \in \mathcal{P}(B) \mid \#E = 5 \,\}$ l'ensemble des échantillons possibles.

a. Quel est le cardinal $\#\Omega$ de Ω ?

$\surd$ $\#\Omega = \#\binom{B}{5} = \binom{18}{5} = 8568.$

b. Combien parmi ces échantillons ne contiennent aucune boule jaune ?

$\surd$ *Il faut choisir les boules parmi les* 12 *restantes, donc le nombre est* $\binom{12}{5} = 792$

c. En supposant une probabilité uniforme sur Ω, quel est la probabilité que toutes les trois couleurs soient représentées dans un échantillon $\omega \in \Omega$? [Indication : on peut utiliser inclusion-exclusion.]

$\surd$ *De* Ω *on exclue l'événement de la question précédente ainsi que les deux événements similaires où la couleur rouge ou bleu est exclue. Mais ainsi on a exclu deux fois tous les échantillons qui sont dans l'intersection de deux événements exclus, c'est-à-dire qui ne contiennent qu'une seule couleur. Il convient donc de rajouter leur nombre, qui est* $3\binom{6}{5} = 18$ *(le facteur* 3 *est pour les trois couleurs possibles). On peut arrêter l'inclusion-exclusion là, car l'intersection des trois événements (chacune des couleurs est absente) est vide. Le nombre d'échantillons dans lesquelles toutes les trois couleurs sont représentées est donc* $8568 - 3 \times 792 + 18 = 6210$*. La probabilité demandée est alors* $\frac{6210}{8565} = \frac{345}{476} \approx 0{,}725$.

3. *a.* Dans un jeu de cartes complet, comptant 4 enseignes (couleurs) avec chacune 13 cartes, on tire 4 fois une carte au hasard, en remettant après chaque tirage la carte tirée dans le jeu. Quelle est la probabilité que les 4 cartes tirées sont de 4 enseignes différentes ?

$\surd$ *On peut calculer pour chaque tirage la probabilité que, sous l'hypothèse que les couleurs sont distinctes jusque là, la nouvelle carte a une nouvelle couleur. Cette probabilité ne dépend que du nombre du tirage, et est successivement* $1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}$. *La probabilité que les* 4 *cartes tirées sont de* 4 *enseignes différente est leur produit, donc* $\frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32} \approx 0{,}0938$.

b. Si on refait l'expérience mais sans remettre les cartes tirées, quelle est alors cette probabilité ? Est-ce que cette probabilité est très différente de celle du premier cas ?

$\surd$ *En tenant compte des cartes restant dans le jeu, les probabilités sont maintenant* $1, \frac{39}{51}, \frac{26}{50}, \frac{13}{49}$, *qui sont pour les trois dernières légèrement plus élevés que les fractions précédentes, les rapports étant respectivement* $\frac{52}{51} \approx 1{,}02$, $\frac{52}{50} \approx 1{,}04$, $\frac{52}{49} \approx 1{,}06$. *Au total le produit devient* $\frac{3!13^3}{51\times50\times49} \approx 0{,}1055$ *(ce qu'on peut estimer sans calculette est que c'est à peu près* 1,12 *fois le résultat précédent).*

c. Si l'on lance 4 fois un dé (équilibré), quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux fois un même résultat ?

$\surd$ *On peut retirer de* 1 *la probabilité d'avoir* 4 *résultats différents:* $1-\frac{5}{6}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{6} = 1-\frac{5}{18} = \frac{13}{18} \approx 0{,}7222$.

4. Soit E un ensemble fini non vide, et $n = \#E$ son cardinal.

a. Quel est le cardinal $\#\mathcal{P}(E)$ de l'ensemble de parties de E ?

b. Montrer que E contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair. (Comme exemple du résultat qu'on demande à démontrer : si l'on a $E = \{a, b, c\}$, alors ses parties de cardinal pair sont $\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ et ses parties de cardinal impair sont $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b, c\}$; il y en a le même nombre, 4, dans les deux cas.)

$\surd$ *On fixe un élément* $e \in E$, *et on définit l'opération* $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ *qui rajoute* e *aux parties qui ne contiennent pas* e, *et enlève* e *aux parties qui le contiennent. Alors* $f(f(S)) = S$ *pour tout* $S \subseteq E$, *donc* f *est une bijection (elle est sa propre application réciproque). Il est aussi clair que* $\#f(S) \not\equiv \#S \pmod 2$ *pour tout* $S \subseteq E$, *autrement dit* f *change la parité de toute partie de* E. *Ainsi la restriction de* f *aux parties de cardinal pair donne une bijection avec les parties de cardinal impair ; les deux sous-ensembles de* $\mathcal{P}(E)$ *contiennent autant d'éléments.*

 Fin.