Examen Arithmétique et algèbre commutative lundi 27 juin 2016
9h00–12h00

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. La notation prendra en compte la clarté et la rigueur des raisonnements, toutes les réponses doivent être justifiées. Tous les anneaux considérés sont unitaires. Le sujet contient 5 questions.

1. Question de cours.

a. Donner la définition d'un anneau principal.

b. Montrer que si K est un corps, alors l'anneau de polynômes $K[X]$ est un anneau principal.

2. *a.* Résoudre pour $x \in \mathbf{Z}$ la congruence $19x \equiv 36 \pmod{48}$.

b. Résoudre pour $x \in \mathbf{Z}$ le système de congruences

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{14} \\ x \equiv 10 \pmod{17} \end{cases} .$$

3. Dans l'anneau $\mathbf{R}[X]$, soient $P = X^2 + 1$ et $Q = X - 2$.

a. Montrer que l'anneau quotient $\mathbf{R}[X]/(PQ)$ n'est pas un anneau intègre.

b. Montrer que P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbf{R}[X]$.

c. Trouver (des coefficients de Bézout) $S, T \in \mathbf{R}[X]$ tels que $1 = SP + TQ$.

d. Soient $f : \mathbf{R}[X] :\to \mathbf{R}[X]/(P)$ et $g : \mathbf{P}[X] \to \mathbf{R}[X]/(Q)$ les projections canoniques. Trouver un polynôme $C \in \mathbf{R}[X]$ tel qu'on ait à la fois $f(C) = 0 \in \mathbf{R}[X]/(P)$ et $g(C) = 1 \in \mathbf{R}[X]/(Q)$.

e. Montrer que $\mathbf{R}[X]/(PQ)$ est isomorphe au produit direct d'anneaux $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

4. Soit $A = \mathbf{Z}[\mathbf{i}\sqrt{5}] = \{\, a + b\mathbf{i}\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Z}\,\}$, un sous-anneau de $\mathbf{C}$. On admet le fait que l'application $N : A \to \mathbf{N}$ donnée par $N(a + b\mathbf{i}\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$ $(a, b \in \mathbf{Z})$ vérifie $N(xy) = N(x)N(y)$ pour $x, y \in A$.

a. Montrer que les seuls éléments inversibles de A sont 1 et -1.

b. En factorisant l'élément 6 de deux manières, montrer que A n'est pas un anneau factoriel.

c. Vérifier dans A les congruences suivantes modulo l'idéal $(1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5})$ engendré par $1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5}$:

i. $21 \equiv 0 \pmod{1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5}}$

ii. $\mathbf{i}\sqrt{5} \equiv 11 \pmod{1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5}}$

d. On considère maintenant l'anneau quotient $B = A/(1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5})$, pour lequel on a la projection canonique $\pi : A \to B$ (évidemment surjective). Montrer la restriction de π au sous-anneau $\mathbf{Z}$ de A est toujours surjective (c'est-à-dire que tout élément de B est la classe d'un nombre entier).

e. Calculer le noyau de cette restriction $\mathbf{Z} \to B$.

f. Montrer que B est isomorphe à un anneau de la forme $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ où n est un entier à déterminer.

5. Dans tout anneau commutatif A, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $x, y \in A$ la formule du binôme (admise)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

où les coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ sont des entiers positifs.

a. Rappeler la définition de la caractéristique d'un anneau.

b. On suppose maintenant que A un anneau commutatif de caractéristique p, qui est un nombre premier. Démontrer qu'alors on a pour tout $a, b \in A$:

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

c. En déduire l'application $f_p : A \to A$ qui envoie $a \mapsto a^p$ est un morphisme d'anneaux.

Fin.