Corrigé Examen Arithmétique et algèbre commutative lundi 27 juin 2016
9h00–12h00

1. Question de cours.

a. Donner la définition d'un anneau principal.

b. Montrer que si K est un corps, alors l'anneau de polynômes $K[X]$ est un anneau principal.

2. *a.* Résoudre pour $x \in \mathbf{Z}$ la congruence $19x \equiv 36 \pmod{48}$.

$\surd$ $x \equiv 12 \pmod{48}$

b. Résoudre pour $x \in \mathbf{Z}$ le système de congruences

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{14} \\ x \equiv 10 \pmod{17} \end{cases}.$$

$\surd$ $x \equiv 197 \pmod{238}$

3. Dans l'anneau $\mathbf{R}[X]$, soient $P = X^2 + 1$ et $Q = X - 2$.

a. Montrer que l'anneau quotient $\mathbf{R}[X]/(PQ)$ n'est pas un anneau intègre.

b. Montrer que P et Q sont premiers entre eux dans $\mathbf{R}[X]$.

c. Trouver (des coefficients de Bézout) $S, T \in \mathbf{R}[X]$ tels que $1 = SP + TQ$.

d. Soient $f : \mathbf{R}[X] :\to \mathbf{R}[X]/(P)$ et $g : \mathbf{P}[X] \to \mathbf{R}[X]/(Q)$ les projections canoniques. Trouver un polynôme $C \in \mathbf{R}[X]$ tel qu'on ait à la fois $f(C) = 0 \in \mathbf{R}[X]/(P)$ et $g(C) = 1 \in \mathbf{R}[X]/(Q)$.

e. Montrer que $\mathbf{R}[X]/(PQ)$ est isomorphe au produit direct d'anneaux $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

4. Soit $A = \mathbf{Z}[\mathbf{i}\sqrt{5}] = \{\, a + b\mathbf{i}\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbf{Z}\,\}$, un sous-anneau de $\mathbf{C}$. On admet le fait que l'application $N : A \to \mathbf{N}$ donnée par $N(a + b\mathbf{i}\sqrt{5}) = a^2 + 5b^2$ $(a, b \in \mathbf{Z})$ vérifie $N(xy) = N(x)N(y)$ pour $x, y \in A$.

a. Montrer que les seuls éléments inversibles de A sont 1 et -1.

b. En factorisant l'élément 6 de deux manières, montrer que A n'est pas un anneau factoriel.

c. Vérifier dans A les congruences suivantes modulo l'idéal $(1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5})$ engendré par $1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5}$:

i. $21 \equiv 0 \pmod{1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5}}$

ii. $\mathbf{i}\sqrt{5} \equiv 11 \pmod{1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5}}$

d. On considère maintenant l'anneau quotient $B = A/(1 + 2\mathbf{i}\sqrt{5})$, pour lequel on a la projection canonique $\pi : A \to B$ (évidemment surjective). Montrer la restriction de π au sous-anneau $\mathbf{Z}$ de A est toujours surjective (c'est-à-dire que tout élément de B est la classe d'un nombre entier).

e. Calculer le noyau de cette restriction $\mathbf{Z} \to B$.

f. Montrer que B est isomorphe à un anneau de la forme $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ où n est un entier à déterminer.

5. Dans tout anneau commutatif A, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout $x, y \in A$ la formule du binôme (admise)

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

où les coefficients binomiaux $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ sont des entiers positifs.

a. Rappeler la définition de la caractéristique d'un anneau.

b. On suppose maintenant que A un anneau commutatif de caractéristique p, qui est un nombre premier. Démontrer qu'alors on a pour tout $a, b \in A$:

$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

c. En déduire l'application $f_p : A \to A$ qui envoie $a \mapsto a^p$ est un morphisme d'anneaux.

Fin.