Corrigé Contrôle mi-semestre pL02, Analyse Combinatoire jeudi 4 mai
10h30-12h30

1. Combien d'éléments y a-t-il dans chacun des ensembles suivants ? Si vous donnez une formule telle que 3^6, $7^{\underline{3}}$, ou $\binom{14}{9}$, précisez aussi sa valeur explicite.

a. L'ensemble des sous-ensembles de $[1,10]$.

$\surd$ *Le nombre de sous-ensembles de* $[1,n]$ *est* 2^n, *d'où on trouve ici* $2^{10} = 1024$.

b. L'ensemble des applications $[1,5] \to [1,3]$.

$\surd$ *Le nombre d'applications* $[1,n] \to [1,m]$ *est* m^n, *d'où on trouve ici* $3^5 = 243$.

c. L'ensemble des applications injectives $[1,5] \to [1,12]$.

$\surd$ *Le nombre d'injections* $[1,n] \to [1,m]$ *est* $m^{\underline{n}}$, *d'où on trouve ici* $12^{\underline{5}} = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95040$.

d. L'ensemble des applications surjectives $[1,5] \to [1,12]$.

$\surd$ *La réponse est* 0, *car* $5 < 12$ *exclut toute possibilité d'une telle surjection.*

e. L'ensemble des applications bijectives $[1,6] \to [1,6]$.

$\surd$ *Le nombre de permutations de* $[1,n]$ *est* $n!$, *d'où on trouve ici* $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

f. L'ensemble des sous-ensembles de $[1,14]$ à 4 éléments.

$\surd$ *Le nombre de* $[1,n]$ *à* k *éléments est* $\binom{n}{k}$, *d'où la réponse* $\binom{14}{4} = \frac{14\times13\times12\times11}{4!} = 1001$.

g. L'ensemble des chemins de réseau de $(0,0)$ vers $(7,8)$. (Un chemin de réseau est une suite de points dans $\mathbf{Z}^2$ où à chaque pas on ajoute soit $(0,1)$ soit $(1,0)$ au point précédent.)

$\surd$ *Le nombre de chemins* $(0,0) \to (i,j)$ *est* $\binom{i+j}{i}$, *d'où on trouve* $\binom{15}{7} = \frac{15\times14\times13\times12\times11\times10\times9}{7!} = 6435$.

h. L'ensemble des entiers $n \in \mathbf{N}$ avec $n < 1000000 = 10^6$ dont les chiffres de l'écriture décimale sont faiblement croissants.

$\surd$ *Une suite faiblement croissante de* 6 *chiffres (on permet des '0' initiaux) correspond à un multi-ensemble d'ordre* 6 *sur l'ensemble de base* $[0,9]$. *Comme* $\#[0,9] = 10$, *le nombre de telles suites est donné par* $\left(\binom{10}{6}\right) = \binom{15}{6} = \frac{15\times14\times13\times12\times11\times10}{6!} = 5005$.

i. L'ensemble des entiers $n \in \mathbf{N}$ avec $n < 10^6$ dont les chiffres de l'écriture décimale sont strictement croissants. N.B. il est important ici que, sauf pour 0, l'écriture décimale ne commence jamais avec un chiffre '0', donc on *n'exclut pas* les nombres tels que 127 dont les chiffres ne seraient pas strictement croissants si l'on l'écrivait comme 000127. (Par contre, pour la question précédente la présence ou non de chiffres '0' initiaux ne change pas la validité des nombres).

$\surd$ *On compte séparément de tels nombres à* 1, 2, 3, 4, 5 *et* 6 *chiffres. Comme les chiffres sont strictement croissants et un '0' initial est interdit sauf pour 0, on n'a effectivement que le choix de chiffres non-nuls. Le choix d'un sous-ensemble du bon nombre de chiffres suffit, car on les range dans l'ordre croissant d'une seule manière.* $\binom{10}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} = 10 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 = 466$. *Ce nombre peut être trouvé également ainsi: tout sous-ensemble des chiffres* $[1,9]$, *rangé en ordre croissant, donne un tel nombre (pour l'ensemble vide on prend le nombre* 0*), sauf que les sous-ensembles à* 7, 8, *ou* 9 *chiffres donnent un nombre trop grand. Alors il reste* $2^9 - \binom{9}{7} - \binom{9}{8} - \binom{9}{9} = 512 - 36 - 9 - 1 = 466$ *solutions.*

j. L'ensemble de mots distincts (c'est-à-dire, suites de lettres sans condition de signification) qu'on peut former en permutant les lettres de "abacadaba". N.B. le mot donné ne contient pas de 'r'.

$\surd$ *Les mots ont longueur* 9. *On peut choisir les positions des deux 'b' de* $\binom{9}{2} = 36$ *manières et ensuite les positions du 'c' et du 'd' de* 7 *respectivement de* 6 *manières, pour* $36 \times 7 \times 6 = 1512$ *solutions. On peut également appliquer la formule* $\binom{9}{5,2,1,1} = \frac{9!}{5!2!1!1} = 1512$.

2. Trois chorales comptant respectivement 24, 41, et 52 choristes décident de monter un grand projet ensemble. Comparaison des listes des membres montre qu'il y a 16 personnes qui chantent dans plusieurs des trois chorales, dont 3 qui chantent dans toutes les trois. Combien de choristes compte le grand chœur formé en réunissant les trois chorales ?

$\surd$ *Si l'on compte les chorales individuellement on trouve* $24 + 41 + 52 = 117$, *mais les* 13 *choristes qui font partie de deux chorales sont comptés une fois de trop, et les* 3 *qui font partie des trois chorales sont même comptés deux fois de trop. Le grand chœur compte donc* $117 - 13 - 2 \times 3 = 98$ *choristes.*

3. On fixe $n \in \mathbf{N}$, et on considère l'ensemble E des chemins de réseau de $(0,0)$ vers (n,n).

a. Exprimer $\#E$ en termes de n.

$\surd$ *Utilisant la formule de* $\mathbf{1}g$ *on trouve* $\#E = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$.

b. Soit $i \in \mathbf{N}$ avec $0 \leq i \leq n$. Montrer qu'il y a autant de chemins de réseau de $(0,0)$ vers $(i, n-i)$ que de chemins de réseau de $(i, n-i)$ vers (n,n).

$\surd$ *Le nombre de chemins* $(0,0) \to (i, n-i)$ *est* $\binom{i+(n-i)}{i}$, *et le nombre de chemins* $(i, n-i) \to (n,n)$ *est* $\binom{(n-i)+i}{n-i}$; *les deux nombres sont égaux à* $\binom{n}{i}$. *On peut aussi établir une bijection entre les chemins des deux types, car la réflexion d'un chemin* $(0,0) \to (i, n-i)$ *dans la diagonale* $\{\, (i,j) \mid i+j=n \,\}$ *donne un chemin* $(n,n) \to (i, n-i)$, *en prenant ce chemin dans le sens inverse on obtient un chemin de réseau* $(i, n-i) \to (n,n)$.

c. Combien de chemins dans E passent par le point $(i, n-i)$?

$\surd$ *On peur prolonger tout chemin* $(0,0) \to (i, n-i)$ *par tout chemin* $(i, n-i) \to (n,n)$, *donc d'après la question précédente le nombre cherché est* $\binom{n}{i} \times \binom{n}{i} = \binom{n}{i}^2$.

d. Démontrer l'identité

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$$

$\surd$ *Tout chemin de réseau dans* E *rencontre la diagonale* $\{\, (i,j) \mid i+j=n \,\}$ *en un et un seul point, qui est de la forme* $(i, n-i)$ *avec* $0 \leq i \leq n$. *Le nombre* $\binom{2n}{n}$ *de ces chemins est donc la somme sur toutes ces valeurs* i *du nombre de chemins de* E *qui passent par* $(i, n-i)$. *D'après la question précédente, cette somme vaut* $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$. *Bien sûr il y a d'autres méthodes pour démontrer cette identité, mais n'était-il pas clair que cette question avait un rapport avec les questions précédentes ?*

Fin.