Corrigé Examen pL02, Analyse Combinatoire, Maths 1 lundi 28 août 2006
14h00–16h00

1. On considère le problème, traité dans le cours, de dénombrer l'ensemble $\mathcal{P}(E) = \{ P \mid P \subseteq E \}$ de toutes les parties (c'est-à-dire sous-ensembles) d'un ensemble fini donné E, en fonction du cardinal $n = \#E$ de cet ensemble de base E.

a. Pour trouver une formule pour $\#\mathcal{P}(E)$, on a utilisé une bijection (correspondance bijective) entre $\mathcal{P}(E)$ et un certain ensemble d'applications définies sur E. Quel est cet ensemble d'applications ?

$\surd$ *L'ensemble d'applications concerné est celui de toutes les applications* $E \to \{0, 1\}$.

b. Décrire la bijection mentionnée dans la question précédente. Spécifier en particulier quelle application correspond pour $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ à la partie $P = \{1, 3, 7, 8\} \in \mathcal{P}(E)$.

$\surd$ *La bijection fait correspondre à une partie* $P \in \mathcal{P}(E)$ *l'application* f_P *définie par* $f_P(x) = 1$ *si* $x \in P$, *et* $f_P(x) = 0$ *si* $x \notin P$. *Pour* $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *et* $P = \{1, 3, 7, 8\}$ *cette application est donnée par le tableau suivant*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_P(x)$	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0

c. Donner une formule pour $\#\mathcal{P}(E)$, et la justifier en utilisant la bijection de la question *a*. Expliciter $\#\mathcal{P}(E)$ pour le cas $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$\surd$ *En général le nombre d'applications* $E \to F$ *entre deux ensembles finis est égal à* $\#F^{\#E}$ *; dans le cas considéré on a* $F = \{0, 1\}$ *et donc* $\#F = 2$, *d'où* $\#\mathcal{P}(E) = 2^{\#E} = 2^n$. *Pour* $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *on trouve* $\#\mathcal{P}(E) = 2^{10} = 1024$.

2. Si on propose n différents parfums de glace, donner une expression en n qui décrit le nombre de glaces différentes à 3 boules qu'on peut former (on ne distingue pas l'ordre des boules dans une glace).

$\surd$ *C'est* $\left(\!\binom{n}{3}\!\right) = \binom{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

3. Soient $m, n \in \mathbf{N}$ avec $m < n$. Alors les expressions $\frac{1}{(1-X)^n}$ et $\frac{1}{(1-X)^{n-m}}$ décrivent des séries formelles bien définies avec coefficients entiers. Il est aussi clair que ces séries formelles vérifient la relation algébrique $(1 - X)^m \cdot \frac{1}{(1-X)^n} = \frac{1}{(1-X)^{n-m}}$.

a. En comparant pour un $k \in \mathbf{N}$ quelconque les coefficients de X^k dans cette relation, on obtient une identité entre expressions combinatoires ; laquelle ?

$\surd$ *C'est* $\sum_{i+j=k} (-1)^i \binom{m}{i} \left(\!\binom{n}{j}\!\right) = \left(\!\binom{n-m}{k}\!\right)$, *ou encore* $\sum_{i=0}^{\min(k,m)} (-1)^i \binom{m}{i} \left(\!\binom{n}{k-i}\!\right) = \left(\!\binom{n-m}{k}\!\right)$.

b. Calculer explicitement les valeurs des deux membres de l'identité trouvée pour le cas particulier $n = 5$, $m = 3$, $k = 6$, et vérifier que ces valeurs sont égales.

$\surd$ $\sum_{i+j=7} (-1)^i \binom{3}{i} \left(\!\binom{5}{j}\!\right) = \binom{3}{0} \left(\!\binom{5}{6}\!\right) - \binom{3}{1} \left(\!\binom{5}{5}\!\right) + \binom{3}{2} \left(\!\binom{5}{4}\!\right) + \binom{3}{3} \left(\!\binom{5}{3}\!\right) = 1 \times 210 - 3 \times 126 + 3 \times 70 - 1 \times 35 = 210 - 378 + 210 - 35 = 7$, *et* $\left(\!\binom{5-3}{6}\!\right) = \left(\!\binom{2}{6}\!\right) = 7$.

Fin.