Corrigé Examen pL02, Analyse Combinatoire, Maths 1 lundi 19 juin 2006
8h30-10h30

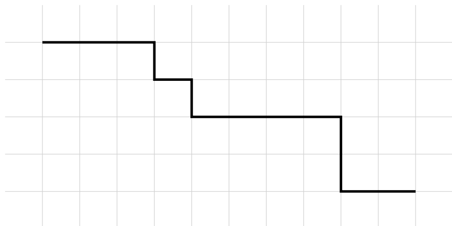
1. On considère le problème de dénombrer pour $b, n \in \mathbf{N}$ donnés, le nombre de manières de placer b boules identiques dans n urnes numérotées ; on ne distingue donc dans une configuration que le *nombre* de boules dans chaque urne, et non pas l'identité de ces boules. Alors une configuration est déterminée par le n-uplet $a_1, \ldots, a_n$ des nombres de boules dans chaque urne, et mathématiquement le problème est celui de dénombrer l'ensemble $E = \{ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{N}^n \mid a_1 + \cdots + a_n = b \}$.

a. L'ensemble E est en bijection avec un certain ensemble de mots sur un alphabet de deux lettres. Donner un tel ensemble et décrire la correspondance bijective.

$\surd$ *Si l'on représente chaque boule par une lettre "O" (par exemple) et la séparation entre deux urnes par une lettre "I", c'est l'ensemble des mots contentant b lettres "O" et $n-1$ lettres "I". Le nombre a_i (le nombre de boules dans l'urne numéro i) est égal à la longueur de la suite (éventuellement vide) de lettres "O" qui précèdent directement l'i-ème lettre "I" dans le mot. Donc le mot correspondant à $(a_1, \ldots, a_n)$ est formé de a_1 lettres "O", puis une lettre "I", puis a_2 lettres "O", puis une lettre "I", ..., puis une lettre "I" et finalement a_n lettres "O".*

b. Les mots de la question précédente peuvent être représentes par des chemins de réseau qui commencent à l'origine $(0,0)$, où les deux lettres correspondent aux deux directions possibles pour un tel chemin. En précisant la correspondance entre lettres et directions que vous choisissez, décrire quels sont les chemins qui correspondent, par l'intermédiaire des mots, aux éléments de E. Dessiner le chemin qui correspond concrètement à $(3,1,4,0,2) \in E$, pour $b = 10$ et $n = 5$.

$\surd$ *Si une lettre "I" correspond à un pas vertical $(i,j) \to (i+1,j)$, et "O" à un pas horizontal$(i,j) \to (i,j+1)$, alors les chemins correspondant aux éléments de E sont précisément ceux qui se terminent au point $(n-1,b)$. Chaque nombre a_i donne le nombre de pas horizontaux sur la ligne avec coordonnée verticale $i-1$ (donc pour $i = 1$ c'est la ligne en haut, pour $i = n$ c'est la ligne en bas). L'élément $(3,1,4,0,2) \in E$ correspond au mot "OOOIOIOOOOIIOO" et au chemin de réseau*



c. Décrire le nombre d'éléments de E par une formule en b et n, et donner le nombre concret de manières de placer 10 boules identiques dans 5 urnes numérotées.

$\surd$ *C'est $\left(\!\binom{n}{b}\!\right) = \binom{n+b-1}{b}$. Pour $n = 5$ et $b = 10$ on trouve $\left(\!\binom{5}{10}\!\right) = \binom{14}{10} = \binom{14}{4} = \frac{14\times13\times12\times11}{4!} = 7 \times 13 \times 11 = 1001$*

2. On considère la série formelle $C = \sum_{n\in\mathbf{N}} c_n X^n$ où $c_n = 1 + 2n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc $C = 1 + 3X + 5X^2 + 7X^3 + 9X^4 + 11X^5 + \cdots$

a. Calculer les 5 premiers termes du produit $(1 - 2X + X^2)C$ (c'est-à-dire les termes jusqu'à celui de X^4 ; certains de ces termes peuvent être nuls).

$\surd$ *En multipliant $1 + 3X + 5X^2 + 7X^3 + 9X^4 + \cdots$ par $1 - 2X + X^2$ on trouve pour les 5 premiers termes $1 + X + 0X^2 + 0X^3 + 0X^4$.*

b. Montrer que les termes restants sont tous nuls, et que la série formelle $(1 - 2X + X^2)C$ est donc en fait un *polynôme*.

$\surd$ *Pour $i \geq 2$, le coefficient de X^i dans le produit est $c_i - 2c_{i-1} + c_{i_2} = (1+2i) - 2(-1+2i) + (-3+2i) = (1+2-3) + (2-4+2)i = 0$. On a donc $(1 - 2X + X^2)C = 1 + X$.*

c. En déduire une expression pour C qui ne contient pas le symbole de sommation '$\sum$'.

$\surd$ *D'après la question précédente, $C = \frac{1+X}{1-2X+X^2} = \frac{1+X}{(1-X)^2}$.*

3. On appelle une suite de nombres réels $(r_n)_{n\in\mathbf{N}} = (r_0, r_1, r_2, \ldots)$ une "progression polynomiale de degré d" si son terme général r_n est donné par une expression polynomiale en n de degré d, c'est-à-dire s'il existe des coefficients réels $a_0, \ldots, a_d$ tels que $r_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_d n^d$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par exemple $\binom{n}{3}_{n\in\mathbf{N}} = (0, 0, 0, 1, 4, 10, 20, 35, \ldots)$ est une progression polynomiale de degré 3, car $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 0 + \frac{1}{3}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n^3$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour une progression polynomiale $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de degré d ils existe aussi une autre liste de coefficients réels $b_0, \ldots, b_d$ telle que son terme général s'écrit $r_n = b_0 + b_1\binom{n}{1} + b_2\binom{n}{2} + \cdots + b_d\binom{n}{d}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On ne vous demande pas de démontrer cela ; vous pouvez l'admettre. Décrire comment on peut trouver concrètement les coefficients $b_0, \ldots, b_d$, si le degré d et un nombre suffisant de termes r_n sont donnés (vous pouvez répondre avec une formule, mais aussi avec une procédure qui fournira les coefficients). Justifier ensuite l'énoncé suivant : *Pour une progression polynomiale de degré d, tous les termes r_n sont entiers si et seulement si tous les coefficients $b_0, \ldots, b_d$ sont entiers.* (On peut remarquer que si l'on remplace dans cet énoncé les coefficients $b_0, \ldots, b_d$ par les coefficients $a_0, \ldots, a_d$, l'énoncé devient faux, comme le montre l'exemple donné.)

√ *On a $\binom{0}{k} = 0$ pour tout $k > 0$, donc $r_0 = b_0$. Or l'opérateur Δ de différences finies transforme la suite $\binom{n}{k}_{n\in\mathbf{N}}$ en $\binom{n}{k-1}_{n\in\mathbf{N}}$ pour $k > 0$, et donc $\Delta\big((r_n)_{n\in\mathbf{N}}\big) = (b_1\binom{n}{0} + b_2\binom{n}{1} + \cdots + b_d\binom{n}{d-1})_{n\in\mathbf{N}}$. Alors comme $\binom{0}{0} = 1$, on a $\Delta\big((r_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)_0 = b_1$. En itérant cette opération on trouve $\Delta^k\big((r_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)_0 = b_k$ pour $k = 0, 1, \ldots, d$, ce qui donne une procédure pour trouver les b_k. On peut aussi simplement rappeler la formule de Taylor discrète $r_n = \sum_{k\in\mathbf{N}} \Delta^k\big((r_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)_0 \binom{n}{k}$ pour arriver à la même conclusion que $b_k = \Delta^k\big((r_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)_0$. On peut facilement voir que la valeur $\Delta^k\big((r_n)_{n\in\mathbf{N}}\big)_0$ qui est calculée par cette procédure est égale à $b_k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}r_{k-i}$, par exemple $b_0 = r_0$, $b_1 = r_1 - r_0$, $b_2 = r_2 - 2r_1 + r_0$, $b_3 = r_3 - 3r_2 + 3r_1 - r_0$, etcetera.*

Pour justifier l'énoncé donné, remarquons que $\binom{n}{k}$ est toujours entier pour $n, k \in \mathbf{N}$, donc si $b_0, \ldots, b_d$ sont tous entiers, alors $r_n = b_0 + b_1\binom{n}{1} + b_2\binom{n}{2} + \cdots + b_d\binom{n}{d}$ sera certainement entier pour tout $n \in \mathbf{N}$. Réciproquement, comme chaque b_i est déterminé à partir des nombres r_n en calculant uniquement des différences, il est clair que si tous les r_n sont entiers, alors les b_i le seront aussi.

Fin.