Corrigé Contrôle continu L2, Algèbre Linéaire 2 mercredi 4 novembre 2015
8h15–10h15

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -8 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Décrire le sous-espace $\mathrm{Ker}(f) \subseteq \mathbf{R}^3$ par un système d'équations linéaires.

$\surd$ *Si $x \in \mathbf{R}^3$ désigne un vecteur inconnu de coordonnées $x_1, \dots, x_3$, l'équation $x \in \ker(f)$ s'écrit $A \cdot x = \vec{0}$, et donne le système*

$$\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 - 2x_3 = 0 \\ -6x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 0 \end{cases}$$

b. Résoudre ce système, et donner une base du noyau $\mathrm{Ker}(f)$.

$\surd$ *Après quelques opérations sur les lignes on voit que le système n'a que rang 2, et est équivalent à*

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 5x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Pour la solution générale on peut donc choisir x_3 librement. Pour obtenir une base on choisit $x_3 = 1$, ce qui donne $x_1 = 5$ et $x_2 = -3$, donc la base a une seule vecteur $(5, -3, 1)$.

c. Trouver une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$.

$\surd$ *Si C_1, C_2, C_3 sont les trois colonnes de la matrice M, on sait qu'elles forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or, on a trouvé la relation $5C_1 - 3C_2 + C_3 = 0$, donc cette famille n'est pas libre. On peut déduire de $C_3 = -5C_1 + 3C_2$ que $\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ et comme $[C_1, C_2]$ est une famille libre, c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$. (Il y a beaucoup d'autres bases, donc de réponses correctes.)*

d. Montrer que $\mathbf{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

$\surd$ *Il suffit de montrer que la somme $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$ est directe, car dans ce cas sa dimension est $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = 3 = \dim(\mathbf{R}^3)$, et donc $\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}^3$ sera automatique. La somme est directe si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, et puisque $\mathrm{Ker}(f)$ est engendré par un seul vecteur $v = (5, -3, 1)$, il suffit de montrer que $v \notin \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$, ou de façon équivalent que $[C_1, C_2, v]$ est une famille libre. Cela peut se faire par exemple en résolvant le système linéaire correspondant, ou en calculant le déterminant des coordonnées de C_1, C_2 et v.*

2. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ associé de façon canonique à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 31 & -18 & 4 \\ 54 & -32 & 8 \\ 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que les vecteurs $b_1 = (2, 3, 0)$, $b_2 = (1, 2, 1)$ et $b_3 = (2, 4, 1)$ sont des vecteurs propres de ϕ, et déterminer les valeurs propres correspondantes.

$\surd$ *On calcule $A \cdot b_1 = (8, 12, 0) = 4b_1$, $A \cdot b_2 = (-1, -2, -1) = -b_2$ et $A \cdot b_3 = (-6, -12, -3) = -3b_3$, donc ce sont des vecteurs propres pour les valeurs propres respectives 4, -1, -3.*

b. Montrer que ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *Comme ils sont des vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes, les vecteurs $[b_1, b_2, b_3]$ forment une famille libre, qui comme famille libre avec nombre de vecteurs égal à la dimension (3) de l'espace est une base. Ayant une base de vecteurs propres, ϕ est diagonalisable.*

c. Donner une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

$\surd$ *La matrice de passage P de la base canonique à une base de vecteurs propres convient, et D sera diagonale avec les valeurs propres respectives comme coefficients diagonaux. D'après ce qui précède*

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{donne} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

d. Argumenter que $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ pour $n \in \mathbf{N}$, et donner une expression explicite pour D^n.

$\surd$ *Puisque $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$ on aura $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ (multiplier l'équation à gauche par P et à droite par P^{-1}). En écrivant l'expansion de $A^n = (P \cdot D \cdot P^{-1})^n$ et en éliminant les facteurs $P^{-1} \cdot P = \mathbf{I}_3$ du produit on obtient $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$ pour $n > 0$ (et pour $n = 0$ on a $P \cdot D^0 \cdot P^{-1} = P \cdot P^{-1} = \mathbf{I}_3 = A^0$). La matrice D^n est la matrice diagonale avec coefficients diagonaux 4^n, $(-1)^n$, et $(-4)^n$.*

e. Calculer explicitement, en fonction de n, les 9 coefficients de A^n.

$\surd$ *Par diverses méthodes on peut calculer*

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et, en abrégeant $4^n = a$, $(-1)^n = b$, et $(-4)^n = c$, on a

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a+3b-6c & -2a-2b+4c & 2b-2c \\ 6a+6b-12c & -3a-4b+8c & 4b-4c \\ 3b-3c & -2b+2c & 2b-c \end{pmatrix}$$

ce qui donne après substitution de a, b, c les 9 coefficients de A^n.

3. Soit $E = \mathbf{C}^3$ et ϕ l'endomorphisme de E de matrice (par rapport à la base canonique)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -6 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer $\det(B)$, et en déduire que 0 est une valeur propre de ϕ.

$\surd$ *On peut d'abord un facteur 4 de la première ligne et un facteur 3 de la seconde, et ensuite opérer sur les colonnes*

$$\det(B) = 4 \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Cela implique que 0 est racine de $\chi_B = \det(X\mathbf{I}_3 - B)$ et donc une valeur propre de B.

b. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X-4 & -4 & 4 \\ 6 & X & -3 \\ -2 & -8 & X+5 \end{vmatrix}$$

est un peu fastidieux mais possible, et donne $X^3 + X^2(-4+0+5) + X(\left|\begin{smallmatrix} -4 & -4 \\ 6 & 0 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 5 \end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix} 0 & -3 \\ -8 & 5 \end{smallmatrix}\right|) - \det B = X^3 + X^2 - 12X$. C'est un peu plus simple si l'on ajoute la second colonne à la dernière, puis soustrait la dernière ligne de la second, donnant

$$\begin{vmatrix} X-4 & -4 & 0 \\ 6 & X & X-3 \\ -2 & -8 & X-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-4 & -4 & 0 \\ 8 & X+8 & 0 \\ -2 & -8 & X-3 \end{vmatrix} = (X-3) \begin{vmatrix} X-4 & -4 \\ 8 & X+8 \end{vmatrix} = (X-3)(X^2+4X)$$

ce qui donne aussi $X^3 + X^2 - 12X$ (d'autres simplifications sont également possibles).

c. Trouver toutes les valeurs propres de ϕ.

$\surd$ *La racine* 0 *de* χ_B *est déjà trouvée, le deux autres sont les racines du quotient après division par* X*, c'est-à-dire de* $X^2 + X - 12$*, et ses racines sont* 3 *et* -4*. Cela correspond à la factorisation* $\chi_B = X(X-3)(X+4)$ *qu'on obtient encore plus facilement après la seconde méthode de calculer* χ_B *ci-dessus. Réponse donc: valeurs propres* 0*,* 3 *et* -4*.*

d. Argumenter sans calcul supplémentaire que ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *On a trouvé* 3 *valeurs propres distinctes, ce qui donne* 3 *sous-espaces propres distincts, chacun de dimension au moins* 1*. Leur somme, toujours directe, et de dimension au moins* $1+1+1=3$*, et remplit donc tout notre espace vectoriel qui est de dimension* 3*. Si la somme des espaces propres remplit l'espace, l'endomorphisme est diagonalisable.*

e. Trouver une base de E formée de vecteurs propres pour ϕ.

$\surd$ *Pour* $\lambda = 0$*,* $\lambda = 3$ *et* $\lambda = -4$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -6 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ -6 & -3 & 3 \\ 2 & 8 & -8 \end{pmatrix}, \qquad B + 4I = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -4 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

montrant que chacune est de rang 2 *(il y a une dépendance linéaire entre ses lignes) et que leurs noyaux contiennent respectivement les vecteurs* $(1,1,2)$*,* $(0,1,1)$*, et* $(1,0,2)$*, qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda = 0$*, pour* $\lambda = 3$ *et pour* $\lambda = -4$*. On vérifie facilement que ce sont effectivement des vecteurs propres de* B *pour ces valeur propres.*

Fin.