

Le résumé du cours est le seul document autorisé. L'utilisation d'une calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdite. Les parties sont indépendantes. Les espaces vectoriels considérés sont toujours sur un corps K ; dans certaines parties K est spécifié plus précisément.

1. Soit $K = \mathbf{R}$, $E = \mathbf{R}^3$, et ϕ l'endomorphisme de E de matrice (par rapport à la base canonique)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A \in \mathbf{R}[X]$ de A .
 - Décomposer χ_A dans $\mathbf{R}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.
 - Déduire de la décomposition trouvée (sans calculer une base de diagonalisation telle qu'il est demandé dans la question suivante) que ϕ est diagonalisable.
 - Trouver une base de diagonalisation pour ϕ .
2. Soit $K = \mathbf{Q}$. On considère l'application linéaire $f : \mathbf{Q}^3 \rightarrow \mathbf{Q}^3$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 8 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

- Décrire le sous-espace $\ker(f) \subseteq \mathbf{Q}^3$ par un système d'équations linéaires en $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Q}^3$.
 - Résoudre ce système, et donner une base de $\ker(f)$.
 - Trouver une base de l'image $\text{Im}(f)$. [On pourra utiliser ce qu'on a trouvé dans la question b.]
 - Trouver une base de $\ker(f) \cap \text{Im}(f)$.
 - En déduire *sans calcul supplémentaire* que f n'est pas diagonalisable. (Des réponses où la conclusion est basée sur un calcul ne seront pas prises en considération.)
3. Soit $K = \mathbf{C}$. On considère les suites de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$a_{n+3} = 2a_n - a_{n+1} + 2a_{n+2}$$

(les valeurs initiales a_0, a_1, a_2 ne sont pas fixées pour le moment).

- a. La relation de récurrence s'écrit

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice M ; donner cette matrice.

- Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M \in \mathbf{C}[X]$ de M , et les valeurs propres (dans \mathbf{C}) de M .
- Trouver dans \mathbf{C}^3 une base de vecteurs propres de M .
- Pour chaque valeur propre λ décrire explicitement la suite récurrente dont les valeurs initiales a_0, a_1, a_2 sont les coefficients du vecteur propre pour λ trouvé dans le point précédent.
- En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite vérifiant la relation de récurrence, et dont les valeurs initiales sont $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, et $a_2 = 10$. [Indication: exprimer le vecteur des valeurs initiales dans la base trouvée de vecteurs propres, et utiliser le point d.]

4. Dans cet exercice on considère le problème de trouver des “racines carrées” d’un endomorphisme donné $\phi \in \text{End}(E)$, c’est-à-dire des endomorphismes $\rho \in \text{End}(E)$ vérifiant $\rho^2 = \phi$. Après quelques considérations générales, on cherchera les racines carrées d’une matrice particulière $A \in \text{Mat}_2(\mathbf{R})$.

- a. Pourquoi une solution éventuelle ρ à ce problème doit forcément commuter avec ϕ ?
- b. En déduire que (pour une solution ρ) tout sous-espace propre E_λ de A sera ρ -stable: $\rho(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.
- c. On fait maintenant l’hypothèse supplémentaire que ϕ est diagonalisable et que *chaque sous-espace propre de ϕ est de dimension 1*. Montrer que si \mathcal{B} est une base de vecteurs propres de ϕ (donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ est diagonale), alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho)$ est aussi diagonale.
- d. Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -16 & 17 \end{pmatrix},$$

trouver ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

- e. Constater que A est diagonalisable avec tous ses sous-espaces propres de dimension 1 ; appliquer alors le point c pour trouver toutes les matrices $B \in \text{Mat}_2(\mathbf{R})$ telles que $B^2 = A$.

5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $v \in E$ un vecteur non nul. On forme une famille de vecteurs $v_0 = v, v_1 = \phi(v), v_2 = \phi^2(v), \dots$, avec donc $v_i = \phi^i(v)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

- a. Cette famille infinie $[v_0, v_1, v_2, \dots]$ ne peut pas être libre (pourquoi?). Montrer qu’il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que v_d s’écrit comme combinaison linéaire des vecteurs v_0, \dots, v_{d-1} avec $[v_0, \dots, v_{d-1}]$ une famille libre.
- b. Montrer qu’il existe un polynôme unitaire $P \in K[X]$ de degré d tel que $P[\phi](v) = 0$, et qu’alors pour $Q \in K[X]$ on a $Q[\phi](v) = 0$ si et seulement si Q est multiple de P (dans $K[X]$).
- c. On pose $W = \text{Vect}(v_0, \dots, v_{d-1})$. Montrer que W est une sous-espace ϕ -stable, et que $P[\phi](w) = 0$ pour tout $w \in W$.
- d. Montrer que sur la base $\mathcal{B}_W = [v_0, \dots, v_{d-1}]$ du sous-espace W , la matrice de la restriction $\phi|_W$ de ϕ à W est donnée par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_W}(\phi|_W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -c_{d-1} \end{pmatrix},$$

où $P = X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \dots + c_1X + c_0$, ce qu’on appelle la matrice compagnon C_P de P .

- e. Montrer que P est le polynôme caractéristique de cette matrice C_P . [Cette démonstration est indépendante de la façon dont on a trouvé la matrice; le résultat peut être démontré par exemple par récurrence sur la taille d de la matrice C_P , en utilisant un développement de déterminant par la première ligne.]
- f. Montrer que si l’on complète la famille libre \mathcal{B}_W avec des vecteurs supplémentaires u_1, \dots, u_{n-d} à une base $\mathcal{B} = [v_0, \dots, v_{d-1}, u_1, \dots, u_{n-d}]$ de tout E (ce qui est possible par le théorème de la base incomplète) alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ sera de la forme en blocs $A = \begin{pmatrix} C_P & M \\ 0 & N \end{pmatrix}$ (où donc N est carrée de taille $n-d$; ce qui est à démontrer est la présence d’un bloc de zéros en bas à gauche).