Corrigé Examen Algèbre Linéaire 2 mardi 16 juin 2015
14h–17h

1. Soit $K = \mathbf{R}$, $E = \mathbf{R}^3$, et ϕ l'endomorphisme de E de matrice (par rapport à la base canonique)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A \in \mathbf{R}[X]$ de A.

$\surd$ *Le calcul direct de*

$$\begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ 4 & X-3 & -2 \\ -6 & 6 & X+1 \end{vmatrix}$$

est un peu fastidieux mais possible, et donne $X^3+X^2(0-3+1)+X(\left|\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -6 & 1 \end{smallmatrix}\right|+\left|\begin{smallmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 1 \end{smallmatrix}\right|)-\det A = X^3-X^2+X(-4-6-9)-2 = X^3-2X^2-X+2$. *C'est un peu plus simple si l'on ajoute la second colonne à la première, puis soustrait la première ligne de la second, donnant*

$$\begin{vmatrix} X+1 & 1 & -1 \\ X+1 & X-3 & -2 \\ 0 & 6 & X+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X+1 & 1 & -1 \\ 0 & X-4 & -1 \\ 0 & 6 & X+1 \end{vmatrix}$$

(d'autres simplifications sont également possibles).

b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{R}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.

$\surd$ *Il est simple de voir que* 1 *est un racine de* χ_A *(ses éventuelles racines entières doivent diviser le terme constant* 2*, ce qui devait aider à trouver cette "racine évidente"). Alors* $X^3-2X^2-X+2 = (X-1)(X^2-X-2) = (X-1)(X-2)(X+1)$, *dont les racines sont* 1, 2, *et* -1.

c. Déduire de la décomposition trouvée (sans calculer une base de diagonalisation telle qu'il est demandé dans la question suivante) que ϕ est diagonalisable.

$\surd$ *Les trois racines de* χ_A *sont des valeurs propres de* ϕ*, et pour chacune l'espace propre est de dimension au moins* 1 *(en fait exactement* 1*, mais cela ne sera pas utilisé). La somme de ces espaces propres, toujours directe, est donc de dimension au moins* $1+1+1=3$*, d'où elle remplit l'espace* E *qui est de dimension* 3*. Que* E *est somme (directe) des espaces propres de* ϕ *est que* ϕ *est diagonalisable. (Un vecteur propre choisi dans chaque espace propre donnera une base de* E*.)*

d. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

$\surd$ *Pour* $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ *et* $\lambda = -1$ *on cherche les noyaux des matrices*

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 6 & -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad A + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant le pivot de Gauss à ces matrices on les réduit respectivement à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montrant que chacune est de rang 2 *(il y a une dépendance linéaire entre ses lignes) et que leurs noyaux contiennent respectivement les vecteurs* $(2,1,3)$, $(1,0,2)$, *et* $(1,1,0)$, *qui forment une base de vecteurs propres, pour respectivement* $\lambda = 1$, *pour* $\lambda = 2$ *et pour* $\lambda = -1$.

2. Soit $K = \mathbf{Q}$. On considère l'application linéaire $f : \mathbf{Q}^3 \to \mathbf{Q}^3$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 6 \\ 8 & 6 & -2 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

a. Décrire le sous-espace $\ker(f) \subseteq \mathbf{Q}^3$ par un système d'équations linéaires en $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Q}^3$.

$\sqrt{}$ *L'équation $x \in \ker(f)$ s'écrit $B \cdot x = \vec{0}$, et donne le système*

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ 8x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 6x_2 - 7x_3 = 0, \end{cases}$$

b. Résoudre ce système, et donner une base de $\ker(f)$.

$\sqrt{}$ *Après quelques opérations sur les lignes on voit que le système n'a que rang 2, et est équivalent à*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ \phantom{2x_1 - {}} x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \tag{$*$}$$

Pour la solution générale on peut donc choisir x_3 librement, et résoudre $x_2 = x_3$ et $2x_1 = -x_2 + 2x_3$. Une base n'aura qu'un seul vecteur, qu'on pourra prendre avec $x_3 = 2$ donc $x_2 = 2$ et $x_1 = -1$, ce qui donne pour base $[b_1]$ avec $b_1 = (-1, 2, 2)$.

c. Trouver une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$. [On pourra utiliser ce qu'on a trouvé dans la question *b.*]

$\sqrt{}$ *Les colonnes $C_1, \ldots, C_3$ de B engendrent $\mathrm{Im}(f)$, et il s'agit d'en extraire une base. On peut interpréter l'équation $B \cdot b_1 = 0$ comme une relations entre ces colonnes, à savoir $-C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0$. Celles-ci montrent que par exemple C_1 s'exprime comme combinaison linéaires de C_2, C_3, donc $[C_2, C_3]$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Puisque elle est aussi libre (par inspection, ou en utilisant le théorème du rang qui dit que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbf{Q}^3) - \dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$), c'est une base de $\mathrm{Im}(f)$.*

d. Trouver une base de $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

$\sqrt{}$ *On pourra voir par inspection que le vecteur b_1 qui engendre $\ker(f)$ se trouve dans $\mathrm{Im}(f)$, donc $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \ker(f)$, et $[b_1]$ en est un base. Une solution alternative est d'imposer à un vecteur $x = pC_2 + qC_3$ l'équation $Ax = 0$, qui devient $pAC_2 + qAC_3 = p(0,0,0) + q.(0,50,25) = (0,0,0)$, ou $q = 0$, donc $[C_2]$ est une base. (Ceci ne contredit pas la solution initiale, car $C_2 = (-3,6,6) = 3b_1$.)*

e. En déduire *sans calcul supplémentaire* que f n'est pas diagonalisable. (Des réponses où la conclusion est basée sur un calcul ne seront pas prises en considération.)

$\sqrt{}$ *Le fait que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ n'est pas réduit à $\{0\}$ montre que leur somme n'est pas directe, donc f ne peut pas être diagonalisable : il a été montré dans le cours que plus généralement si f diagonalisable, alors $E = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \lambda\,\mathrm{id})$ (ici on utilise le cas $\lambda = 0$).*

3. Soit $K = \mathbf{C}$. On considère les suites de nombres complexes $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$a_{n+3} = 2a_n - a_{n+1} + 2a_{n+2}$$

(les valeurs initiales a_0, a_1, a_2 ne sont pas fixées pour le moment).

a. La relation de récurrence s'écrit

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix}$$

pour une certaine matrice M; donner cette matrice.

$\sqrt{}$ *Dans chaque ligne i de M, les coefficients sont ceux de la combinaison linéaire qui décrit le terme i du second membre en fonction des termes a_n, a_{n+1}, a_{n+2} du premier membre. Comme évidemment $a_{n+1} = 0a_n + 1a_{n+1} + 0a_{n+2}$ et $a_{n+2} = 0a_n + 0a_{n+1} + 1a_{n+2}$, les deux premières lignes sont $(0\ 1\ 0)$ et $(0\ 0\ 1)$. De façon similaire mais moins banale, la relations de récurrence $a_{n+3} = 2a_n - a_{n+1} + 2a_{n+2}$ dit que la dernière ligne est $(2\ -1\ 2)$. Du coup*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_M \in \mathbf{C}[X]$ de M, et les valeurs propres (dans $\mathbf{C}$) de M.

$\surd$ *Ce polynôme ce calcule facilement: $\chi_M = X^3 - 2X^2 + X - 2$ (et en reconnaissant que M est la transposée d'une matrice compagnon, c'est immédiat). Il se factorise $\chi_M = (X-2)(X^2+1) = (X-2)(X-\mathbf{i})(X+\mathbf{i})$, donc les values propres sont $2, \mathbf{i}, -\mathbf{i}$.*

c. Trouver dans $\mathbf{C}^3$ une base de vecteurs propres de M.

$\surd$ *Pour $\lambda = 2, \lambda = 2\mathbf{i}, \lambda = 2 - \mathbf{i}$, on trouve respectivement (par exemple) les vecteurs $(1,2,4)$, $(1,\mathbf{i},-1)$ et $(1,-\mathbf{i},-1)$*

d. Pour chaque valeur propre λ décrire explicitement la suite récurrente dont les valeurs initiales a_0, a_1, a_2 sont les coefficients du vecteur propre pour λ trouvé dans le point précédent.

$\surd$ *Il s'agit chaque fois de la suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$, car*

$$M^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \lambda^n \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n \\ \lambda^{n+1} \\ \lambda^{n+2} \end{pmatrix}$$

e. En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite vérifiant la relation de récurrence, et dont les valeurs initiales sont $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, et $a_2 = 10$. [Indication: exprimer le vecteur des valeurs initiales dans la base trouvée de vecteurs propres, et utiliser le point *d.*]

$\surd$ *Écrire $(0,2,10) = a(1,2,4) + b(1,\mathbf{i},-1) + c(1,-\mathbf{i},-1)$ donne un système 3×3 à coefficients complexes, dont la solution est $a = 2$, $b = -1 + \mathbf{i}$ et $c = -1 - \mathbf{i}$. Le termes général de la suite est alors $a2^n + b\mathbf{i}^n + c(-\mathbf{i})^n$ pour ces valeurs a, b, c.*

4. Dans cet exercice on considère le problème de trouver des "racines carrées" d'un endomorphisme donné $\phi \in \mathrm{End}(E)$, c'est-à-dire des endomorphismes $\rho \in \mathrm{End}(E)$ vérifiant $\rho^2 = \phi$. Après quelques considérations générales, on cherchera les racines carrées d'une matrice particulière $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$.

a. Pourquoi une solution éventuelle ρ à ce problème doit forcément commuter avec ϕ ?

$\surd$ *Tout polynôme en R commute avec R, en particulier $R^2 = A$.*

b. En déduire que (pour une solution ρ) tout sous-espace propre E_λ de A sera ρ-stable: $\rho(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.

$\surd$ *C'est une propriété générale d'endomorphismes qui commutent et des sous-espaces définis comme noyaux de polynômes en ϕ (résumé de cours, en bas de page 4). Concrètement si $v \in E_\lambda$ alors $\phi(\rho(v)) = \rho(\phi(v)) = \rho(\lambda v) = \lambda\rho(v)$, donc $\rho(v) \in E_\lambda$.*

c. On fait maintenant l'hypothèse supplémentaire que ϕ est diagonalisable et que *chaque sous-espace propre de ϕ est de dimension* 1. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de ϕ (donc $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\phi)$ est diagonale), alors $\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(\rho)$ est aussi diagonale.

d. Pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -16 & 17 \end{pmatrix},$$

trouver ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique est $X^2 - 10X + 9$, dont les racines (les valeurs propres) sont 1 et 9. Un vecteur propre pour $\lambda = 1$ est $(1,1)$, et un vecteur propre pour $\lambda = 9$ est $(1,2)$; ensemble les deux vecteurs propres forment une base.*

e. Constater que A est diagonalisable avec tous ses sous-espaces propres de dimension 1 ; appliquer alors le point c pour trouver toutes les matrices $B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$ telles que $B^2 = A$.

5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $v \in E$ un vecteur non nul. On forme une famille de vecteurs $v_0 = v, v_1 = \phi(v), v_2 = \phi^2(v), \ldots$, avec donc $v_i = \phi^i(v)$ pour tout $i \in \mathbf{N}$.

a. Cette famille infinie $[v_0, v_1, v_2, \ldots]$ ne peut pas être libre (pourquoi?). Montrer qu'il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que v_d s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $v_0, \ldots, v_{d-1}$ avec $[v_0, \ldots, v_{d-1}]$ une famille libre.

b. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire $P \in K[X]$ de degré d tel que $P[\phi](v) = 0$, et qu'alors pour $Q \in K[X]$ on a $Q[\phi](v) = 0$ si et seulement si Q est multiple de P (dans $K[X]$).

c. On pose $W = \mathrm{Vect}(v_0, \ldots, v_{d-1})$. Montrer que W est une sous-espace ϕ-stable, et que $P[\phi](w) = 0$ pour tout $w \in W$.

d. Montrer que sur la base $\mathcal{B}_W = [v_0, \ldots, v_{d-1}]$ du sous-espace W, la matrice de la restriction $\phi|_W$ de ϕ à W est donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_W}(\phi|_W) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & -c_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & -c_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -c_{d-1} \end{pmatrix},$$

où $P = X^d + c_{d-1}X^{d-1} + \cdots + c_1 X + c_0$, ce qu'on appelle la matrice compagnon C_P de P.

e. Montrer que P est le polynôme caractéristique de cette matrice C_P. [Cette démonstration est indépendante de la façon dont on a trouvé la matrice; le résultat peut être démontré par exemple par récurrence sur la taille d de la matrice C_P, en utilisant un développement de déterminant par la première ligne.]

f. Montrer que si l'on complète la famille libre $\mathcal{B}_W$ avec des vecteurs supplémentaires $u_1, \ldots, u_{n-d}$ à une base $\mathcal{B} = [v_0, \ldots, v_{d-1}, u_1, \ldots, u_{n-d}]$ de tout E (ce qui est possible par le théorème de la base incomplète) alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ sera de la forme en blocs $A = \left(\begin{smallmatrix} C_P & M \\ 0 & N \end{smallmatrix}\right)$ (où donc N est carrée de taille $n-d$; ce qui est à démontrer est la présence d'un bloc de zéros en bas à gauche).

Fin.