Contrôle continu L2, Algèbre Linéaire 2 mercredi 5 novembre 2014
8h15–10h15

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés. Les trois exercices sont indépendants.

1. On considère l'application linéaire $f : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique, est

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a. Décrire le sous-espace $\ker(f) \subseteq \mathbf{C}^4$ par un système d'équations linéaires.

b. Résoudre ce système, et donner une base de $\ker(f)$.

c. Trouver une base de l'image $\operatorname{Im}(f)$. [On pourra utiliser ce qu'on a trouvé dans la question *b*.]

d. Trouver une base de $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

e. On peut en déduire *sans calcul supplémentaire* soit que f est diagonalisable, soit que f n'est pas diagonalisable. Lequel des deux est le cas, et pourquoi ? (Des réponses avec un calcul ne seront pas prises en considération.)

2. Soit $E = \mathbf{R}^3$ et ϕ l'endomorphisme de E de matrice (par rapport à la base canonique)

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 16 & 12 & -10 \\ 14 & 11 & -9 \end{pmatrix}$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B.

b. Décomposer χ_B comme produit de facteurs de degré 1.

c. Déduire de la décomposition trouvée que ϕ est diagonalisable (en n'utilisant que la connaissance de χ_B, donc sans calculer une base telle que demandée dans la question suivante).

d. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

3. Soit a, b deux nombres réels *distincts*. On forme le polynôme P de degré 2 dont a, b sont les racines, c'est-à-dire $P = (X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab$. Soit ϕ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{R}$, dont on suppose qu'il vérifie l'équation $P[\phi] = 0 \in \operatorname{End}(E)$, c'est-à-dire $\phi^2 - (a + b)\phi + ab\,\mathrm{id}_E = 0$.

a. Montrer que les seules valeurs propres λ que ϕ peut avoir sont $\lambda = a$ et $\lambda = b$.

b. On note $E_\lambda = \ker(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$ pour $\lambda \in \{a, b\}$. Montrer que $\phi(v) - av \in E_b$ pour tout $v \in E$.

c. Appliquer le théorème du rang à $\phi - a\,\mathrm{id}$ pour déduire de la question précédente l'inégalité $\dim(E_a + E_b) \geq \dim(E)$, pour ensuite conclure $E_a + E_b = E$. Citez avec soin les résultats théoriques utilisés dans l'argumentation (y compris l'énoncé du théorème du rang).

d. En fixant $v \in E$ on pose $w_1 = \phi(v) - av$ et $w_2 = \phi(v) - bv$ (d'après la question b on a $w_1 \in E_b$, et en échangeant les rôles de a, b également $w_2 \in E_b$). Écrire v comme combinaison linéaire de w_1 et de w_2 (ce qui rend plus explicite le fait que $E = E_a + E_b$, déjà trouvé dans la question c).

e. Quelle propriété de ϕ découle de ces questions ? Est-ce que a, b sont forcément tous deux des valeurs propres de ϕ ? (D'après la question a, ce sont les seules valeurs propres *possibles*).

f. [bonus] Où dans vos réponses l'hypothèse $a \neq b$ est-elle utilisée ? Ces réponses seraient-elles différentes si on n'avait pas eu cette hypothèse ?

Fin.