Corrigé Contrôle continu Algèbre Linéaire 2 mercredi 1 octobre 2014
9h–10h

1. Soient E, E' deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de respectivement E et E', $f : E \to E'$ une application linéaire, et $A = {}_{\mathcal{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f par rapport à ces bases. Argumenter que les conditions suivantes sont équivalentes :
(i) $\ker(f) = \{0\}$;
(ii) les colonnes de A forment une famille libre dans K^n (où $n = \dim(E')$);
(iii) le rang $\mathrm{rg}(A)$ de A est égal au nombre $m = \dim E$ de colonnes de A.

$\surd$ *Si $\mathcal{B} = [b_1, \ldots, b_m]$, les colonnes de A sont $f(b_1), \ldots, f(b_m)$, exprimés en coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$. Comme l'expression en coordonnées est un isomorphisme, une combinaison linéaire des colonnes avec coefficients $c_1, \ldots, c_m$ est nul si et seulement si $0 = c_1 f(b_1) + \cdots + c_m f(b_m) = f(c_1 b_1 + \cdots + c_m b_m)$, autrement dit si $c_1 b_1 + \cdots + c_m b_m \in \ker(f)$. La famille des colonnes est libre si et seulement si cela entraîne $c_1 = \cdots = c_m = 0$, ce qui est équivalent (car $\mathcal{B}$ est une base) à $c_1 b_1 + \cdots + c_m b_m = 0$; donc (i) est équivalent à (ii). Si cette condition est vérifiée, la matrice A possède m colonnes indépendantes et donc rang m. Si elle n'est pas vérifiée la plus grande famille libre de colonnes a moins de m éléments, et le rang de A n'est alors pas m ; cela montre (ii) $\iff$ (iii). En utilisant le théorème du rang, on peut également établir (i) $\iff$ (iii) directement.*

2. Dans l'espace vectoriel K^n on considère deux sous-espaces V, W, avec respectivement des bases $[v_1, \ldots, v_k]$ et $[w_1, \ldots, w_l]$. Soit A la matrice $n \times k$ avec colonnes $v_1, \ldots, v_k$, soit B la matrice $n \times l$ avec colonnes $w_1, \ldots, w_l$, et $C = (A \mid B)$ la matrice $n \times (k + l)$ avec colonnes $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l$.

a. Montrer que pour tout vecteur $u \in V \cap W$ il existe $c_1, \ldots, c_k$ et $d_1, \ldots, d_l$, tous uniques, tels que

$$u = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_l \end{pmatrix}$$

et qu'alors le vecteur colonne x de coefficients $c_1, \ldots, c_k, -d_1, \ldots, -d_l$ vérifie $C \cdot x = 0$.

$\surd$ *Tout vecteur de V est de façon unique combinaison linéaire de $[v_1, \ldots, v_k]$, et l'application de A forme une telle combinaison avec coefficients $c_1, \ldots, c_k$. De façon similaire pour W, $[w_1, \ldots, w_l]$, et l'application de A. Le premier énoncé traduit cela pour u qui est à la fois dans V et dans W. Si on a cela $C \cdot x = A(c_1, \ldots, c_k) + B(-d_1, \ldots, -d_l) = A(c_1, \ldots, c_k) - B(d_1, \ldots, d_l) = u - u = 0$*

b. Si $L_C : K^{k+l} \to K^n$ est l'application linéaire de matrice C (par rapport aux bases canoniques), montrer que $\dim(V \cap W) = \dim(\ker(L_C))$.

$\surd$ *L'ensemble de tels $(c_1, \ldots, c_k, -d_1, \ldots, -d_l)$ est $\ker(L_C)$, et la correspondance $(c_1, \ldots, c_k, -d_1, \ldots, -d_l) \mapsto A(c_1, \ldots, c_k)$ (ce qui est aussi $-B(d_1, \ldots, d_l)$) est linéaire et inversible $\ker(L_C) \to V \cap W$ (l'application réciproque retrouve $(c_1, \ldots, c_k, -d_1, \ldots, -d_l)$ pour $u = A(c_1, \ldots, c_k)$, dont on a vu que c'est possible et de façon unique, car $u \in V \cap W$). L'isomorphisme implique égalité de dimensions de ces sous espaces (mais ils ne sont pas identiques, car même pas sous-espaces d'un même espace vectoriel : on a $\ker(L_C) \subseteq K^{k+l}$ pendant que $V \cap W \subseteq K^n$).*

c. En déduire la formule $\dim(V \cap W) + \dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$ [ce qui est $k + l$ ici].

$\surd$ *On a $V + W = \mathrm{Im}(L_C)$) (car $V + W = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_l)$), et le théorème du rang dit pour L_C que $\dim(\ker(L_C)) + \dim(\mathrm{Im}(L_C)) = \dim(K^{k+l}) = k + l$, ce qui donne le résultat énoncé.*

3. Soit $f : K^2 \to K[X]_{<4}$ l'application linéaire vérifiant $f\binom{a}{b} = a(X^3 - X + 2) + b(X^3 + 2X^2 - 2X)$, et $g : K[X]_{<4} \to K^2$ l'application linéaire vérifiant $g(P) = \binom{P(2)}{P(3)}$ (dont les coordonnées sont les évaluations du polynôme $P \in K[X]_{<4}$ respectivement en $X = 2$ et en $X = 3$).

a. Si $\mathcal{E}$ est la base canonique de K^2 et $\mathcal{B} = [1, X, X^2, X^3]$ la base naturelle (parfois aussi dite canonique) de $K[X]_{<4}$, donner les matrices $A = {}_{\mathcal{B}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ et $B = {}_{\mathcal{E}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$.

$\surd$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

b. Calculer la matrice C de $g \circ f$ (par rapport à la base canonique).

$\surd$ *Les colonnes sont* $g(f\binom{1}{0}) = \binom{2^3-2+2}{3^3-3+2} = \binom{8}{26}$ *et* $g(f\binom{0}{1}) = \binom{2^3+2\times 2^2-2\times 2}{3^3+2\times 3^2-2\times 3} = \binom{12}{39}$ *;* $C = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 26 & 39 \end{pmatrix}$. *On peut aussi calculer le produit matriciel* $C = B \cdot A$, *ce qui donne le même résultat.*

c. Déterminer le sous-espace $V = \ker(g \circ f) \subseteq K^2$.

$\surd$ *L'équation* $C \cdot \binom{x}{y} = 0$ *donne le système* $8x + 12y = 0;\ 26x + 39y = 0$, *dont la solution peut être donné sous la forme* $\binom{x}{y} \in \mathrm{Vect}\binom{3}{-2}$, *donc* $V = \mathrm{Vect}\binom{3}{-2}$.

d. Argumenter que $f(V) = \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) \subseteq K[X]_{<4}$, et donner ensuite une base de $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$.

$\surd$ *On* $v \in V$ *si et seulement si* $g(f(v)) = 0$, *ce qui veut dire* $f(v) \in \ker(g)$. *En appliquant* f *à de tels vecteurs* v *on voit que* $f(V) \subseteq \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$. *On a également* $\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g) \subseteq f(V)$, *car pour tout* $w \in \mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)$ *il existe* $v \in E$ *avec* $f(v) = w$, *et pour un tel* V *on trouve* $v \in V$, *car* $f(v) = w \in \ker(g)$. *Alors* $V = \mathrm{Vect}\binom{3}{-2}$ *donne* $f(V) = \mathrm{Vect}(f\binom{3}{-2}) = \mathrm{Vect}(X^3 - 4X^2 + X + 6)$.

e. Déterminer $\dim(\mathrm{Im}(f) + \ker(g))$. [Il n'est pas demandé de trouver une base de $\mathrm{Im}(f) + \ker(g)$.]

$\surd$ *On voit facilement* $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ *(les polynômes* $X^3 - X + 2$ *et* $X^3 + 2X^2 - 2X$ *sont indépendants), ainsi que* $\dim(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{rg}\, B = 2$. *Donc par le théorème du rang* $\dim(\ker(g)) = 4 - 2 = 2$, *et on vient de calculer* $\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)) = 1$. *Il découle alors de la formule de la question* **2***c* *que* $\dim(\mathrm{Im}(f) + \ker(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(g)) - \dim(\mathrm{Im}(f) \cap \ker(g)) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Fin.