Examen Algèbre Linéaire 2 lundi 6 janvier 2014
14h–17h

Le polycopié du cours est le seul document autorisé. Les parties sont indépendantes. K désigne un corps quelconque.

1. Sur le corps $\mathbf{Q}$ on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. Calculer le polynôme caractéristique χ_M et les valeurs propres de M. Conclure que M est trigonalisable sur $\mathbf{Q}$.

b. Pourquoi M n'est pas diagonalisable ?

c. Déterminer les sous-espaces caractéristiques, et une matrice triangulaire supérieure T semblable à M, en précisant une relation de similitude entre M et T à l'aide d'une matrice (inversible) P. Le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

2. Le but de cette partie est de montrer que pour tout endomorphisme ϕ d'un K-espace vectoriel E de dimension finie, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de ϕ par rapport à cette base prenne la forme en blocs

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \qquad \text{avec des matrices carrées } R \text{ nilpotente et } S \text{ inversible.}$$

(Une matrice carrée R est nilpotente si $R^k = 0$ pour un certain $k \in \mathbf{N}$.) La possibilité de blocs de taille nulle n'est pas exclue, donc il est possible que R ou S soit à elle seule $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ toute entière.

a. Pourquoi suffit-il de montrer qu'il existe une décomposition $E = V \oplus W$, somme directe de sous-espaces ϕ-stables, telle que la restriction $\phi|_V$ soit nilpotente et que $\phi|_W$ soit inversible?

b. Montrer que si un endomorphisme ψ d'un K-espace vectoriel W possède un polynôme annulateur avec terme constant non nul, alors ψ est inversible. [On va l'appliquer pour $\psi = \phi|_W$.]

c. Soit P le polynôme minimal de ϕ. En décomposant $P = X^k Q$ pour $k \in \mathbf{N}$ tel que Q ne soit pas divisible par X, établir une décomposition comme décrite dans la question *a*, et conclure.

3. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et $\mathcal{E} = [e_1, e_2, e_3]$ une base de E. On considère l'endomorphisme ϕ de E dont la matrice par rapport à $\mathcal{E}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Lequel des vecteurs de la base $\mathcal{E}$ est vecteur propre de ϕ, et pour quelle valeur propre λ ?

b. Argumenter sans calcul que, pour cette valeur λ, le sous-espace $V = \mathrm{Im}(\phi - \lambda I_E)$ est ϕ-stable, et que $\dim(V) \leq 2$.

c. Déterminer une base de V.

d. Déterminer le polynôme minimal $\tilde{\mu}$ de la restriction $\phi|_V$ de ϕ à V, c'est-à-dire le polynôme unitaire $\tilde{\mu}$ du plus bas degré possible tel que $\tilde{\mu}[\phi](v) = 0$ pour tout $v \in V$.

Le reste de cette partie peut être fait de façon indépendante ; voir la suggestion (ii) ci-dessous.

e. Determiner un polynôme unitaire P annulateur de A, c'est-à-dire tel que $P[A] = 0$. [Deux méthodes (au choix) pour trouver un tel P sont suggérées: (i) d'après le lemme 5.1.7 du cours, le polynôme minimal de ϕ est égal à $(X - \lambda)\tilde{\mu}$; (ii) d'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A.]

f. Soit $S \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme quelconque, et R son reste dans la division euclidienne par le polynôme P de la question précédente. Montrer que les évaluations de S et R en une racine α de P sont les mêmes : $S[\alpha] = R[\alpha]$. Montrer également que si α est une racine multiple, alors on a aussi la relation correspondante pour leurs polynômes dérivés : $S'[\alpha] = R'[\alpha]$.

g. Déterminer pour $n \in \mathbf{N}$ le reste dans la division euclidienne de X^n par P.

h. Donner une expression pour la puissance A^n de la matrice A (pour tout $n \in \mathbf{N}$).

continué au verso

4. Soit $(x_1,\dots,x_n)\in K^n$ et $(y_1,\dots,y_n)\in K^n$ non nuls, avec $n\geq 2$. On définit une matrice A par

$$A=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n\end{pmatrix}.$$

a. Montrer que toute paire de colonnes de A est liée, et que A est donc de rang 1.

b. Conclure que $\lambda=0$ est une valeur propre de A, et déterminer la dimension de l'espace propre $V_0=\ker(A-0I)$ associé à cette valeur propre.

c. On choisit une base de V_0, et on l'étend à une base $\mathcal{B}$ de K^n. Décrire la forme globale de la matrice A' qui exprime (l'endomorphisme de K^n correspondant à) A par rapport à la base $\mathcal{B}$, et en déduire que $\chi_A=X^{n-1}(X-c)$ pour un certain $c\in K$.

d. Pourquoi a-t-on $c=\mathrm{tr}(A)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$?

e. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A)\neq 0$.

f. Soit $a,b\in K$; calculer $\det(B)$ pour

$$B=\begin{pmatrix} b & a & a & a & a\\ a & b & a & a & a\\ a & a & b & a & a\\ a & a & a & b & a\\ a & a & a & a & b\end{pmatrix}$$

en écrivant ce déterminant comme une évaluation de χ_A pour une certaine matrice A de rang 1.

Fin.