**Contrôle continu Algèbre Linéaire 2** mercredi 2 octobre 2013
9h00–10h00

Les documents ne sont pas autorisés.

**1.** Dans le $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}^5$ est donné la famille de vecteurs $[c_1, c_2, \ldots, c_6]$ formés pas les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 5 & 13 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*a.* Extraire de cette famille une base du sous-espace $V = \mathrm{Vect}(c_1, c_2, \ldots, c_6)$ de $\mathbf{R}^5$.

*b.* Compléter cette base de $V$ à une base de $\mathbf{R}^5$ en y rajoutant certains vecteurs de la base canonique de $\mathbf{R}^5$.

*c.* Donner un sous-espace $W$ de $\mathbf{R}^5$ supplémentaire à $W$, c'est-à-dire tel que $\mathbf{R}^5 = V \oplus W$.

**2.** Dans le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $E$ des fonctions partout indéfiniment dérivables $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, on désigne par $f_1, f_2, f_3, f_4$ les fonctions (vecteurs) particulières qui sont données par $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = x \sin x$ et $f_4(x) = x \cos x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, et on pose $V = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

*a.* Argumenter que $[f_1, f_2, f_3, f_4]$ est une famille libre, et en déduire la valeur de $\dim V$.

*b.* On désigne par $D$ l'opération de différentiation $E \to E$, dont on sait que c'est une application linéaire (résultat admis). Montrer que le sous-espace $V$ est $D$-stable, et décrire la matrice de (la restriction de) $D$ par rapport à la base $[f_1, f_2, f_3, f_4]$ de $V$.

**3.** [Question de cours.] Rappeler les définitions d'une valeur propre d'un endomorphisme $\phi$ d'une espace vectoriel $E$, et du sous-espace propre associé à une telle valeur propre $\lambda$. Donner ensuite une démonstration du résultat suivant : Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des valeurs propres *distinctes* de $\phi$, et les sous-espaces $V_1, \ldots, V_k$ sont les espaces propres respectivement associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, alors la somme de sous-espaces $V_1 + \cdots + V_k$ est une somme *directe*.

**Fin.**