Contrôle continu Algèbre Linéaire mercredi 6 novembre 2019
8h15–10h15

Consultation du cours écrit, et de son résumé, est autorisée. Les espaces vectoriels sont sur un corps K, que vous pouvez supposer être un parmi $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$. Let trois parties sont indépendantes

1. Soit ϕ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 \\ -5 & 7 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A \in K[X]$ de A.

b. Décomposer χ_A comme produit de facteurs de degré 1.

c. Déduire de la décomposition trouvée que ϕ est diagonalisable.

d. Trouver une base de diagonalisation pour ϕ.

2. On considère la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par la relation de récurrence $a_{n+2} = a_n + 3a_{n+1}$ et les valeurs initiales $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

a. Calculer les 7 premiers termes de cette suite.

b. Donner une matrice A telle que la relation de récurrence s'écrit

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

c. Trouver un polynôme dont les valeurs propres de A sont des racines.

d. Trouver les valeurs propres de A, et une base de vecteurs propres.

e. En déduire une expression explicite pour le terme général a_n de la suite.

3. Soit $E = K^4$, $f : E \to K$ l'application linéaire $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, et $V = \ker(f)$.

a. Justifier que V est un sous-espace vectoriel de E, et donner sa dimension.

b. Soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$ l'endomorphisme dont la matrice (par rapport à la base canonique) est

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & -2 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Justifier que $f \circ \phi$ est une application linéaire $K^4 \to K$, et déterminer sa matrice (par rapport aux bases canoniques de K^4 et de $K = K^1$).

c. En déduire que $\ker(f \circ \phi) = V$, et conclure que le sous-espace V est ϕ-stable.

d. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de V.

e. D'après la question *c*, la restriction $\phi|_V$ de ϕ à V est un endomorphisme du sous-espace V. Déterminer sa matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi|_V)$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ trouvée dans la question *c*.

f. Vérifier que $(\phi|_V)^2 = \phi|_V$.

g. Trouver les valeurs propres de $\phi|_V$, et décrire les sous-espaces propres de $\phi|_V$ en donnant une base de chacun, exprimée en coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$.

h. Décrire ces vecteurs comme éléments de K^4, c'est-à-dire par rapport à sa base canonique. [Sans erreur de calcul, vous devez trouver des vecteurs propres de ϕ, pour les mêmes valeurs propres.]

Fin.