Examen Algèbre Linéaire (L2)

vendredi 14 juin 2019
14h–16h

L'utilisation d'une calculatrice, ou de tout autre appareil électronique, n'est pas autorisée.
Les exercices sont indépendants.

1. Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathbf{Q}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
b. Décomposer χ_A dans $\mathbf{Q}[X]$ comme produit de facteurs de degré 1.
c. Argumenter que ϕ est diagonalisable, et trouver ensuite une base de diagonalisation pour ϕ.
d. Exprimer A^n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

2. *a.* Dans $\mathbf{Z}$, calculer $\operatorname{pgcd}(11414, 3601)$.
b. Dans $\mathbf{Z}$, calculer $d = \operatorname{pgcd}(199, 52)$ et trouver $s, t \in \mathbf{Z}$ tels que $d = 199s + 52t$.

3. On considère l'endomorphisme ϕ du $\mathbf{C}$-espace vectoriel $\mathbf{C}^4$ dont la matrice, par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$, est

$$M = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}}(\phi) = \begin{pmatrix} -11 & -6 & -6 & 0 \\ 20 & 11 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & -20 & 11 \end{pmatrix}.$$

a. En utilisant la forme triangulaire en blocs de M, calculer le polynôme caractéristique $\chi_\phi = \chi_M$ comme produit de deux facteurs, chacun un polynôme de degré 2.
b. Factoriser encore ces deux polynômes, pour obtenir une factorisation complète de χ_ϕ. Vous verrez que χ_ϕ possède une racine simple, qu'on appellera λ, et une racine triple ν.
c. Déterminer des bases des sous-espaces propres E_λ et E_ν. En considérant les dimensions de ces sous-espaces, conclure si ϕ est diagonalisable ou non.
d. Déterminer des bases des sous-espaces $\widetilde{E}_\lambda$ et $\widetilde{E}_\nu$, qui étendent (si nécessaire) les bases de E_λ respectivement de E_ν de la question précédente.
e. En mettant ensemble, dans un ordre convenable, les vecteurs des deux bases de la question précédente, on peut obtenir une base $\mathcal{B}$ de trigonalisation de M. En précisant $\mathcal{B}$, donner la matrice triangulaire $T = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$.

Fin.