Travaux dirigés 6L19 Géométrie, Feuille 3 12 février 2009

K désigne un corps, E un K-espace vectoriel, et $\mathcal{A}$ un espace affine de direction E.

1. Dans cette partie on suppose que $\dim \mathcal{A} = 3$. Soit $\mathcal{R} = (o, \mathcal{E})$ un repère cartésien de $\mathcal{A}$.

a. Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in K$. Sous quelles conditions l'ensemble $\mathcal{P} = \{\, (x, y, z)_\mathcal{R} \mid \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \,\}$ est-il un plan affine de $\mathcal{A}$?

b. Soit $\alpha', \beta', \gamma', \delta' \in K$ un autre tel 4-uplet, et $\mathcal{P}' = \{\, (x, y, z)_\mathcal{R} \mid \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \,\}$. Sous quelles conditions l'intersection $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est-elle une droite affine de $\mathcal{A}$?

c. On suppose désormais que la condition du point précédent est vérifiée. Déterminer toutes les équations linéaires (comme celles de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$) qui définissent un plan affine de $\mathcal{A}$ contenant la droite $\mathcal{D}$.

d. Décrire un vecteur non nul dans la direction $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{D}$.

2. Soit $A, B, C \in \mathcal{A}$ trois points non alignés d'un espace affine $\mathcal{A}$, qui forment un repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$ du plan $\mathrm{Aff}(A, B, C)$. Soit $\mathcal{D}$ une droite qui coupe les droites $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{A,C}$, et $\mathcal{D}_{A,B}$ chacun en un seul point, quels points on appelle respectivement P, Q, et R.

a. Argumenter que $\mathcal{D}$ est contenu dans le plan $\mathrm{Aff}(A, B, C)$.

b. Introduire trois variables à l'aide desquelles on exprimera les coordonnées barycentriques de P, Q, et R par rapport à $\mathcal{S}$ (chaque fois on peut choisir une des coordonnées comme variable, et exprimer les autres coordonnées en fonction de celle-ci).

c. Donner une équation en ces variables qui exprime le fait que P, Q, et R sont alignés.

d. Donner des coordonnées barycentriques des isobarycentres $\mathrm{bar}(A, P)$, $\mathrm{bar}(B, Q)$ et $\mathrm{bar}(C, R)$, et montrer que ces points sont alignés. (On dit que les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet (c'est-à-dire quatre droites, ici $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{A,C}$, $\mathcal{D}_{A,B}$, et $\mathcal{D}$, qui se coupent mutuellement en un seul point) sont alignés.)

e. Donner des coordonnées barycentriques des trois points $A' = Q + \overrightarrow{AR} = R + \overrightarrow{AQ}$, $B' = R + \overrightarrow{BP} = P + \overrightarrow{BR}$, et $C' = P + \overrightarrow{CQ} = Q + \overrightarrow{CP}$, et montrer que ces points sont alignés.

3. Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de $\mathcal{A}$ qui se coupent en un point P, et $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ deux hyperplans parallèles de $\mathcal{A}$, tels que ni $\mathcal{D}$ ni $\mathcal{D}'$ soit faiblement parallèle à $\mathcal{H}_1$, et que ni $\mathcal{H}_1$ ni $\mathcal{H}_2$ contienne P.

a. Montrer qu'il existe des points A, B, A', B' tels que $\mathcal{D} \cap \mathcal{H}_1 = \{A\}$, $\mathcal{D} \cap \mathcal{H}_2 = \{B\}$, $\mathcal{D}' \cap \mathcal{H}_1 = \{A'\}$, et $\mathcal{D}' \cap \mathcal{H}_2 = \{B'\}$, et que les vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$ sont proportionnels, tout comme $\overrightarrow{PA'}$ et $\overrightarrow{PB'}$.

b. Montrer que pour les deux pairs de vecteurs proportionnels mentionnées, leurs rapports sont égaux: $\overrightarrow{PA} : \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA'} : \overrightarrow{PB'}$, et que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ sont également proportionnels, avec le même rapport (théorème de Thalès).

4. Utiliser le théorème de Thalès de la question précédente pour démontrer les deux théorèmes suivants.

a. Théorème de Pappus. Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de $\mathcal{A}$, et des points $P, Q, R \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}'$ ainsi que $P', Q', R' \in \mathcal{D}' \setminus \mathcal{D}$. Si $\mathcal{D}_{P,Q'}$ et $\mathcal{D}_{Q,P'}$ sont parallèles ainsi que $\mathcal{D}_{P,R'}$ et $\mathcal{D}_{R,P'}$, montrer alors que $\mathcal{D}_{Q,R'}$ et $\mathcal{D}_{R,Q'}$ sont également parallèles. [Indication : montrer d'abord que dans ce cas les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont contenues dans un même plan ; si elles sont parallèles on appliquera un simple calcul vectoriel, sinon on pourra appliquer le théorème de Thalès plusieurs fois.]

b. Une forme du théorème de Desargues. Soit A, B, C et A', B', C' deux triangles dont les côtés correspondants sont parallèles (c'est-à-dire $\mathcal{D}_{A,B}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{A',B'}$ etc.). Montrer que les droites $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$, et $\mathcal{D}_{C,C'}$ sont concourantes ou parallèles. [Indication : on montrera que si deux de ces trois droites se coupent, la troisième passera aussi par leur point d'intersection. Dans le cas où aucune paire se coupe, on montrera que les trois droites sont parallèles.]