Corrigé Travaux dirigés 6L19 Géométrie, Feuille 1 15 janvier 2009

1. Soit F un K-espace vectoriel, vu comme espace affine, donc $\overrightarrow{AB} = B - A$. Soit $\mathcal{A}$ une partie de F, et $A_0 \in \mathcal{A}$, tels que $\{\, \overrightarrow{A_0B} \mid B \in \mathcal{A} \,\}$ forme un sous-espace vectoriel E de F.

a. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de F, de direction E.

$\surd$ *On montrera que $\mathcal{A} = A_0 + E$, qui est par définition un espace affine de direction E. Ceci découle de : $B \in \mathcal{A}$ si et seulement si $\overrightarrow{A_0B} \in E$ (car $E = \{\, \overrightarrow{A_0B} \mid B \in \mathcal{A} \,\}$ et on ne peut avoir $\overrightarrow{A_0B} = \overrightarrow{A_0B'}$ que si $B = B'$), si et seulement si $B \in A_0 + E$ (car $B = A_0 + \vec{x}$ si et seulement si $\vec{x} = \overrightarrow{A_0B}$).*

b. Donner un exemple d'un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de F tel que $\mathcal{S}$ *ne soit pas* un sous-espace affine, mais tel que l'ensemble $\{\, \overrightarrow{PQ} \mid P, Q \in \mathcal{S} \,\}$ soit néanmoins un sous-espace vectoriel de F (observer qu'on laisse varier les deux points, pendant que pour $\mathcal{A}$ seulement le point B variait). [On peut déjà trouver un exemple avec $K = \mathbf{R}$ et F un espace vectoriel de dimension 1.]

$\surd$ *Il est facile de trouver des sous-ensembles propres dont les différences remplissent tout l'espace : par exemple $\mathbf{R}_{>0}$ dans $\mathbf{R}$ (plus généralement un demi-espace ou même « secteur » d'un $\mathbf{R}$-espace), mais aussi $\mathbf{N} \cup [0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. Ce ne sont pas des espaces affines, comme on voit facilement.*

c. Rappeler pourquoi (pour tout sous-espace vectoriel E de F) il existe un K-espace vectoriel F' et $f \in \mathcal{L}(F, F')$ tels que $E = \operatorname{Ker}(f)$.

$\surd$ *Le plus simple est de prendre $F' = F/E$ et pour f la projection canonique. On pourrait prendre pour F' un supplémentaire de E dans F, et pour f la projection de F sur F' parallèle à E.*

d. Avec un tel f on pose $B = f(A_0) \in F'$. Montrer que $\mathcal{A} = f^{-1}(B) = \{\, x \in F \mid f(x) = B \,\}$.

$\surd$ *On a $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) = f(A_0) \iff f(x - A_0) = 0 \iff \overrightarrow{A_0x} \in \operatorname{Ker}(f) = E \iff x \in \mathcal{A}$, donc $f^{-1}(B) = \mathcal{A}$.*

e. On suppose désormais que $\mathcal{A} \neq E$. Montrer (en utilisant le point *d*) que cela entraîne $\mathcal{A} \cap E = \emptyset$.

$\surd$ *Si on avait $B = 0$ dans le point d, cela impliquerait $\mathcal{A} = f^{-1}(0) = \operatorname{Ker}(f) = E$ contredisant $\mathcal{A} \neq E$. Alors $B \neq 0$, et pour tout $A \in \mathcal{A}$ et $x \in E$ on a $f(A) = B \neq 0 = f(x)$ donc $A \neq x$, et $\mathcal{A} \cap E = \emptyset$. Un argument alternatif consiste à observer que E et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces affines parallèles (car tous deux de direction E), qui sont donc soit confondus, soit disjoints, d'après un énoncé du cours.*

f. Soit E' un autre sous-espace vectoriel de F, vérifiant $A_0 \in E + E'$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap E'$ est un sous-espace affine de $\mathcal{A}$, de direction $E \cap E'$.

$\surd$ *Un point P de $\mathcal{A}'$ doit vérifier par définition $\overrightarrow{A_0P} \in E$ et $P \in E'$; montrons d'abord qu'un tel point existe (donc $\mathcal{A}' \neq \emptyset$). D'après l'hypothèse il existe $x \in E$ et $y \in E'$ avec $x + y = A_0$; alors $P = y$ est un exemple d'un point qui vérifie ces conditions, car $\overrightarrow{A_0y} = y - A_0 = -x \in E$. Fixons maintenant un point $A_1 \in \mathcal{A}'$ quelconque. On montrera que l'ensemble $\{\, \overrightarrow{A_1P} \mid P \in \mathcal{A}' \,\}$ est égal à $E \cap E'$, qui comme intersection de sous-espaces vectoriels en est un aussi. Pour $P \in \mathcal{A}'$ on a d'une part $\overrightarrow{A_1P} \in E$, car A_1 et P sont dans $\mathcal{A}$ qui est de direction E, et d'autre part $\overrightarrow{A_1P} = P - A_1 \in E'$ car $A_1, P \in E'$ qui est un espace vectoriel; cela établit $\{\, \overrightarrow{A_1P} \mid P \in \mathcal{A}' \,\} \subseteq E \cap E'$. Réciproquement pour $\vec{x} \in E \cap E'$ on a $\vec{x} = \overrightarrow{A_1P}$ où $P = A_1 + \vec{x}$ appartient à $\mathcal{A}$ (car $A_1 \in \mathcal{A}$ et $\vec{x} \in E$) et à E' (car $A_1, \vec{x} \in E'$), et donc à $\mathcal{A}'$; cela établit $E \cap E' \subseteq \{\, \overrightarrow{A_1P} \mid P \in \mathcal{A}' \,\}$. Donc on est dans la situation du départ avec $\mathcal{A}$, A_0, et E remplacés respectivement par $\mathcal{A}'$, A_1, et $E \cap E'$; la question* **1***a montre donc que $\mathcal{A}'$ est un espace affine de direction $E \cap E'$.*

g. Réciproquement, soit $\mathcal{A}'$ un sous-espace affine de $\mathcal{A}$, de direction D (un sous-espace vectoriel de E), et $A_1 \in \mathcal{A}'$ un point quelconque. On désigne par $\langle A_1 \rangle$ la droite vectorielle de F engendré par (le vecteur) A_1. Montrer (toujours sous l'hypothèse que $\mathcal{A} \neq E$) qu'en prenant $E' = D + \langle A_1 \rangle$ dans la construction du point précédent, on retrouve $\mathcal{A} \cap E' = \mathcal{A}'$.

$\surd$ *$\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A} \cap E'$ (d'après le point précédent) sont deux sous-espaces affines qui contiennent A_1, et qui sont respectivement de direction D et $E' \cap E$. Pour leur égalité il suffit donc de montrer $D = E' \cap E$. On a $D \subseteq E$ et $A_1 \notin E$ (car $\mathcal{A} \cap E = \emptyset$), donc $E' \cap E = (D + \langle A_1 \rangle) \cap E$ est une sous-espace vectoriel propre de $D + \langle A_1 \rangle$ qui contient D, d'où il est nécessairement égal à D. (Forme équivalente du raisonnement : pour que $d + \lambda A_1 \in E'$ (avec $d \in D$ et $\lambda \in K$) appartienne à E, il faut que $\lambda A_1 = (d + \lambda A_1) - d \in E$, et comme $A_1 \notin E$, cela nécessite $\lambda = 0$, d'où $E' \cap E = D$.)*

2. Ici, et dans la suite, $\mathcal{A}$ désignera un espace affine de direction E, un K-espace vectoriel.
Soit $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ quatre points (pas nécessairement distincts) tels que les familles $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$ soient toutes les deux liées.

a. Montrer que si en plus $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est lié, alors toutes les paires de vecteurs parmi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ sont liées (on dira alors que A, B, C, D sont alignés).

$\surd$ *D'abord, le sous-espace vectoriel S engendré par $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$ contient les trois vecteurs restants: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Il suffira donc d'établir que $\dim S \leq 1$. Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ sont toutes les deux liées, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ engendrera un sous-espace de dimension 1 contenant $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AC}$ s'il est non-nul, auquel cas S est ce sous-espace. Reste le cas $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ donc $A = B$, mais dans ce cas $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD})$ est lié, et donc aussi $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD})$, et S, étant engendré par les vecteurs liés $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CD}$, est de dimension ≤ 1.*

b. Un suppose maintenant qu'au contraire $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre. Montrer que dans ce cas $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (on dira alors que A, B, C, D forment un parallélogramme).

$\surd$ *D'aprés l'hypothèse $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont chacun non nul, donc il existe $\lambda, \mu \in K$ tels que $\overrightarrow{CD} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD} = \mu\overrightarrow{AC}$. On a toujours $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ (car c'est équivalent à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ dans quelle égalité les deux membres valent $\overrightarrow{AD}$), c'est-à-dire $(1-\lambda)\overrightarrow{AB} - (1-\mu)\overrightarrow{AC} = 0$. Comme $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est libre, ceci n'est possible que si les deux scalaires dans la combinaison linéaire sont nuls, c'est-à-dire si $\lambda = \mu = 1$, ce qui donne les égalités cherchées.*

3. Soit $A, B, C \in \mathcal{A}$ non alignés (donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ est libre dans E). Soit $\lambda, \mu, \nu \in K$ des scalaires; on définit des points $P = A + \lambda\overrightarrow{AB}$, $Q = B + \mu\overrightarrow{BC}$ et $R = C + \nu\overrightarrow{CA}$.

a. Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$ en termes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

$\surd$ *On a $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(A+\lambda\overrightarrow{AB})(B+\mu\overrightarrow{BC})} = \overrightarrow{AB} - \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{(B+\mu\overrightarrow{BC})(C+\nu\overrightarrow{CA})} = \overrightarrow{BC} - \mu\overrightarrow{BC} + \nu\overrightarrow{CA} = (1-\mu)\overrightarrow{BC} - \nu(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\nu\overrightarrow{AB} + (1-\mu-\nu)\overrightarrow{BC}$.*

b. Donner une expression en λ, μ, ν qui s'annule si et seulement si $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont liées (et donc P, Q, R alignés). [Penser aux déterminants.]

$\surd$ *On peut prendre pour l'expression le déterminant de $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$, exprimés dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\nu \\ \mu & 1-\mu-\nu \end{vmatrix} = 1 - \lambda - \mu - \nu + \lambda\mu + \lambda\nu + \mu\nu$ ce qu'on peut réécrire $(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) + \lambda\mu\nu$.*

c. Montrer que P, Q, R sont alignés si soit $\{0,1\} \subseteq \{\lambda, \mu, \nu\}$, soit $\lambda, \mu, \nu \neq 1$ et $\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\nu}{1-\nu} = -1$.

$\surd$ *On écrit l'équation sous la forme $(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu) = -\lambda\mu\nu$. Si le premier membre est nul l'un des paramètres est 1, et l'équation sera satisfaite si et seulement si un autre paramètre est 0, c'est-à-dire si $\{0,1\} \subseteq \{\lambda, \mu, \nu\}$. Dans le cas contraire on peut diviser par le premier membre pour obtenir après réarranger $\frac{\lambda}{1-\lambda}\frac{\mu}{1-\mu}\frac{\nu}{1-\nu} = -1$.*

4. Soit $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, $A_3 = (x_3, y_3)$ trois points quelconques de K^2, qu'on considère ici comme espace affine.

a. Donner une expression en les 6 variables qui s'annule si et seulement si l'espace engendré par les $\overrightarrow{A_iA_j}$ pour $i, j \in \{1,2,3\}$ est de dimension ≤ 1 (on rappelle que $\overrightarrow{A_iA_j} = A_j - A_i$ dans K^2).

$\surd$ *Comme dans la question précédente on peut prendre le déterminant de $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_2A_3}$ (car tout autre $\overrightarrow{A_iA_j}$ en est une combinaison linéaire), exprimés ici dans la base canonique de K^2. Cela donne $\begin{vmatrix} x_1-x_2 & x_2-x_3 \\ y_1-y_2 & y_2-y_3 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_2 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_1 - x_3y_2$, ce qui se simplifie à $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2$.*

b. Montrer qu'on peut écrire cette expression (à un scalaire non-nul près) comme le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\surd$ *C'est un simple constat que l'évaluation du déterminant est égal à l'expression trouvée ci-dessus.*

c. Expliquer cette forme de l'expression, en considérant le plongement de l'espace affine K^2 comme sous-espace affine de K^3 donné par $(x,y) \mapsto (x,y,1)$. [On pourra utiliser la question **1**.]

$\surd$ *Ce plongement réalise l'espace affine comme un sous-espace affine $\mathcal{A}$ de K^3 distinct de son propre espace direction $E \subset K^3$ (cf. **1***e*). Alors dans ce cas le sous-espace affine $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ engendré par A_1, A_2, A_3 est l'intersection $\mathcal{A} \cap E'$ où E' est le sous-espace vectoriel de K^3 engendré par A_1, A_2, A_3 (cf. **1***g*) et la direction D de $\mathcal{A}'$ est de codimension 1 dans E'. Le déterminant du point précédent est non-nul si et seulement si $\dim(E') = 3$, si et seulement si $\dim(D) = \dim(\mathcal{A}') = 2$.*