Corrigé Examen 6L19 : Géométrie jeudi 10 mai 2012

9h00–12h00

Tous les espaces affines considérés sont définis sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. La droite passant par deux points distincts X, Y est notée (XY) (c'est $\mathcal{D}_{X,Y}$ dans le polycopié).

1. Soit Γ un cercle du plan affine euclidien $\mathcal{P}$, et A, B, C, D quatre points distincts situés sur Γ, et tels que $[C, D]$ forme un diamètre de Γ (donc le centre de Γ se trouve sur (CD)).

a. Montrer que les droites (AC) et (AD) sont perpendiculaires.

$\surd$ *On sait que le lieu des points A tels que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ est le cercle de diamètre $[C, D]$, c'est-à-dire Γ, et en effet A est situé sur ce cercle.*

b. Soit $\mathcal{D}$ une droite perpendiculaire à (CD). Montrer que $\mathcal{D}$ coupe les droites (AC) et (BC), chacune en un point unique.

$\surd$ *Deux droites du plan non parallèles se coupent forcément, donc il suffit d'exclure la possibilité que $\mathcal{D}$ soit parallèle à (AC) ou à (BC). Mais cela voudrait dire que (AC) ou à (BC) est perpendiculaire à (CD) et donc une droite tangente à Γ, ce qui serait absurde.*

c. On appelle P le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec (AC), et Q le point d'intersection de $\mathcal{D}$ avec (BC). Montrer que les quatre points A, B, P, Q sont cocycliques.

$\surd$ *Par la cocyclicité de A, B, C, D on a $(\widehat{(AB), (BC)}) = (\widehat{(AD), (DC)})$. Or on a $(AD) \perp (AC)$ et $(DC) \perp \mathcal{D}$, donc $(\widehat{(AD), (DC)}) = (\widehat{(AC), \mathcal{D}})$. Mais comme $(BC) = (BQ)$, $(AC) = (PA)$ et $\mathcal{D} = (PQ)$, on a montré $(\widehat{(AB), (BQ)}) = (\widehat{(AP), (PQ)})$, ce qui établit la cocyclicité de A, B, P, Q. Si $P = A$ ou $Q = B$ ou $P = Q$ on n'a pas le droit de parler de (PA) respectivement de (BQ) ou de (PQ), mais A, B, P, Q seront néanmoins cocycliques : au moins une paire parmi les quatre points étant confondue, ils seront cocycliques s'il ne sont pas alignés (sur le cercle circonscrit des points, qui sont effectivement trois), et s'il sont alignés c'est nécessairement sur la droite (AB) et on aura donc $P = A$ et $Q = B$, quel deux points sont évidemment cocycliques (par exemple sur Γ).*

d. En déduire le résultat suivant: si ABC est un triangle non aplati de $\mathcal{P}$, et si on choisit des points $P \in (AC)$ et $Q \in (BC)$ distincts de A, B, C, alors A, B, P, Q sont cocycliques si et seulement si (PQ) est perpendiculaire à la droite $(C\Omega)$, où Ω est le centre du cercle circonscrit de ABC.

$\surd$ *Soit $D = \Omega - \overrightarrow{\Omega C}$ le point diamétralement opposé à C dans le cercle circonscrit Γ. Si (PQ) est perpendiculaire à $(C\Omega)$, alors le résultat démontré s'applique (avec $\mathcal{D} = (PQ)$), et A, B, P, Q sont donc cocycliques. Si par contre (PQ) n'est pas perpendiculaire à $(C\Omega)$, alors la droite $\mathcal{D}$ passant par P et perpendiculaire à $(C\Omega)$ coupe (BC) en un point $Q' \neq Q$, et le même résultat montre que A, B, P, et Q' sont cocycliques. Mais le cercle sur lequel ils sont situés, qui est le cercle circonscrit à ABP, coupe la droite (BC) en deux points B et Q', et ne passe donc pas par le point Q qui est aussi sur la droite (BC). Par conséquent A, B, P, Q ne sont pas cocycliques dans ce cas.*

e. Soit ABC est un triangle de $\mathcal{P}$, non aplati, et non rectangulaire en C. Soit $H_A \in (BC)$ le pied de la hauteur de ABC issue de A, et $H_B \in (AC)$ le pied de la hauteur de ABC issue de B. Montrer que $(H_A H_B)$ est parallèle à la droite tangente en C au cercle circonscrit de ABC.

$\surd$ *La droite tangente en C au cercle circonscrit de ABC et perpendiculaire à $(C\Omega)$, avec Ω le centre du cercle. D'après la question précédente (avec $P = H_B$ et $Q = H_A$) il suffit donc de montrer que A, B, H_A, et H_B sont cocycliques. Or, à cause des angles droites en H_A, H_B, ils le sont, sur le cercle de diamètre $[A, B]$.*

2. Soient A, B, C trois points du plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On désigne par $p = d(A, B)$, $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$ les distances entre ces points.

a. Montrer que $p \leq q + r$.

$\surd$ *On a $p = \|\overrightarrow{AB}\|$, $q = \|\overrightarrow{AC}\|$ et $r = \|\overrightarrow{BC}\|$. Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ d'après Chasles, et dans un espace vectoriel euclidien on a l'inégalité $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, soit $p \leq q + r$ pour $x = \overrightarrow{AC}$ et $y = \overrightarrow{CB}$.*

b. Montrer qu'on a également $q - r \leq p$ et $r - q \leq p$, autrement dit qu'on a $|q - r| \leq p$.

$\surd$ *On obtient de façon similaire $q \leq p + r$ soit $q - r \leq p$, et $r \leq p + q$ soit $r - q \leq p$, donc $|q - r| \leq p$. Déduites d'un ensemble symétrique d'inégalités, ces inégalités sont symétriques par rapport à p, q, r.*

On appelle les inégalités $|q - r| \leq p \leq q + r$ obtenues dans ces questions les « inégalités triangulaires ». Elles sont équivalentes à $|r - p| \leq q \leq r + p$ ou encore à $|p - q| \leq r \leq p + q$ (vous pouvez sans démonstration les utiliser sous l'une de ces formes si cela vous semble utile).

c. On suppose $B \neq A \neq C$, et on fixe une orientation du plan $\mathcal{P}$. Soit $\phi \in \mathbf{R}$ une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$. Montrer que

$$\cos\phi = \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq}.$$

[Indication : on pourra choisir une base de E convenable et calculer en coordonnées.]

$\surd$ *Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormale directe de E dans laquelle $\vec{u}$ est le vecteur unitaire $\overrightarrow{AB}/p$. Alors $\overrightarrow{AB} = (p, 0)_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{AC} = (q\cos\phi, q\sin\phi)_{\mathcal{B}}$ (le point à distance q sur la demi-droite engendrée par l'image de $\vec{u}$ par la rotation par ϕ), et on a*

$$r^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \langle \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\rangle = p^2+q^2-2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle = p^2+q^2-2pq\cos\phi,$$

dont il découle directement $\cos\phi = \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq}$ (on peut noter que $B \neq A \neq C$ implique $pq \neq 0$).

[On pourrait également déduire l'équation de la relation $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ vue en cours. Pour $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$ cela ramène à montrer que $2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = p^2+q^2-r^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2$, ce qui relève d'un calcul vectoriel élémentaire.]

On fixe maintenant des nombres $p, q, r > 0$ vérifiant les inégalités triangulaires ; on cherche à montrer que réciproquement il existe des points A, B, C du plan tels que $p = d(A, B)$, $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$. On commence par choisir $A \in \mathcal{P}$ quelconque, et $B \in \mathcal{P}$ tel que $d(A, B) = p$, ce qui est certainement possible.

d. Montrer que si au moins une des inégalités triangulaires est une égalité, c'est-à-dire si $|q-r| = p$ ou $p = q + r$, alors il existe un point unique $C \in (AB)$ tel que $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$.

$\surd$ *Posons $C = A + \lambda\overrightarrow{AB} = \mathrm{bar}((A, 1-\lambda), (B, \lambda))$, alors $d(A, C) = |\lambda| \, \|\overrightarrow{AB}\| = |\lambda| p$ et $d(B, C) = |1-\lambda| \, \|\overrightarrow{BA}\| = |1-\lambda| p$. Alors si $p = q + r$ on doit avoir $\lambda \in [0, 1]$ (car sinon $|\lambda| + |1-\lambda| > 1$ et donc $q + r > p$) et $\lambda = \frac{q}{p}$ est l'unique solution. Si $|q - r| = p$ on a soit $q - r = p$ soit $r - q = p$; dans le premier cas on doit avoir $\lambda \geq 1$ (sinon $|\lambda| - |1-\lambda| = |\lambda| + \lambda - 1 < 1$) et dans le second cas on doit avoir $\lambda \leq 0$ (sinon $|1-\lambda| - |\lambda| = |1-\lambda| - \lambda < 1$). Ainsi on trouve $\lambda = \frac{q}{p}$ dans le premier cas et $\lambda = -\frac{q}{p}$ dans le second cas comme unique solution.*

e. On suppose désormais les inégalités triangulaires strictes, c'est-à-dire $|q-r| < p < q+r$. Montrer que

$$-1 < \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq} < +1.$$

$\surd$ *Les inégalités demandées sont équivalentes à $-2pq < p^2+q^2-r^2 < 2pq$ (car $p, q > 0$), ou encore à $r^2 < (p+q)^2$ et $(p-q)^2 < r^2$. Elles sont alors une conséquence de la version équivalente $|p-q| < r < p+q$ des inégalités triangulaires strictes. Il est aussi clair que ces inégalités sont nécessaires pour avoir $r^2 < (p+q)^2$ et $(p-q)^2 < r^2$: si on avait $p = r - q$ on aurait $r^2 = (p+q)^2$ et si on avait $p = q - r$ ou $p = q + r$ alors on aurait $(p-q)^2 = r^2$.*
[Malgré la ressemblance à la formule du point précédent, toute réponse mentionnant $\cos\phi$ est certainement fausse : ϕ avait été introduit comme un angle concernant les points A, B, C, et ici on cherche à trouver de tels points (notamment C), donc ϕ n'est plus défini (en revanche, si les inégalités demandées sont vérifiées, il y aura un candidat pour l'angle ϕ, qui permettra de trouver C, comme il est fait dans le point suivant). La mention de "réciproquement" et "Déduire des inégalités triangulaires" vous signalaient l'inversion de la direction de l'argument.]

f. Utiliser les résultats trouvés pour montrer qu'il existe précisément deux choix différents pour $C \in \mathcal{P}$ tels que A, B, C forme un triangle non aplati avec $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$.

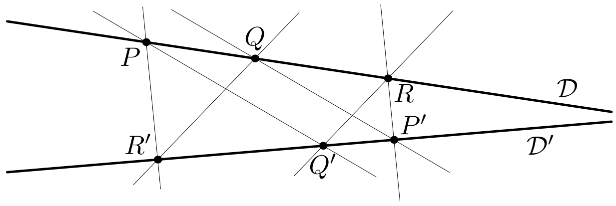
$\surd$ *D'après la question précédente on peut définir $\phi = \arccos\left(\frac{p^2+q^2-r^2}{2pq}\right)$, qui sera dans l'intervalle ouvert $(0, \pi)$. D'après la question c, pour tout C vérifiant $q = d(A, C)$ et $r = d(B, C)$ la mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ sera alors congruent à $+\phi$ ou à $-\phi$ modulo 2π, donc un tel triangle A, B, C n'est jamais aplati. En prenant $C = A + q\rho_\phi(\vec{u})$, où ρ_ϕ est la rotation par ϕ dans le plan vectoriel euclidien orienté E, on aura*

$$\frac{p^2+q^2-d(B, C)^2}{2pq} = \cos\phi = \frac{p^2+q^2-r^2}{2pq}$$

*dont on déduit facilement $d(B, C) = r$, prouvant l'existence d'un triangle A, B, C convenable. Ce point C est un point de l'intersection $\mathcal{S}(A, q) \cap \mathcal{S}(B, r)$, et comme A, B, et C ne sont pas alignés, cette intersection contient exactement un autre point d'après la question **1***c*, et ce point fournit l'autre possibilité pour C. (On voit facilement que c'est le point $C' = A + q\rho_\phi^{-1}(\vec{u})$.)*

3. Dans cette partie on démontrera le théorème de Pappus, dont l'énoncé est le suivant :

Théorème de Pappus. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites distinctes d'un espace affine $\mathcal{A}$, et des points $P, Q, R \in \mathcal{D}$ et $P', Q', R' \in \mathcal{D}'$ sur ces deux droites (dans le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent, ces points sont supposés tous distincts du point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$). Si (PQ') est parallèle à (QP'), et (PR') est parallèle à (RP'), alors (QR') est parallèle à (RQ').*



Les questions *a,b* démontrent ce théorème dans le *plan* affine, ce qui est le cas principal.

a. Montrer le théorème dans le cas où $\dim \mathcal{A} = 2$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.

$\surd$ *Les points P, Q, P', Q' forment un parallélogramme, donc $\overrightarrow{P'Q'} = -\overrightarrow{PQ}$, et de façon similaire $\overrightarrow{P'R'} = -\overrightarrow{PR}$; alors $\overrightarrow{Q'R'} = \overrightarrow{P'R'} - \overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{QR}$, donc Q, R, Q', R' forment un parallélogramme et (QR') et (RQ') sont parallèles comme voulu.*

b. Montrer le théorème dans le cas où $\dim \mathcal{A} = 2$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se coupent en un point S. [Indication: on pourra utiliser le théorème de Thalès.]

$\surd$ *D'après le théorème de Thalès, il existe des homothéties h_1, h_2 de centre S tels que $h_1(P) = Q$ et $h_1(Q') = P'$ ainsi que $h_2(R) = P$ et $h_2(P') = R'$: il suffit de prendre h_1 de rapport $\lambda = \overrightarrow{SQ}/\overrightarrow{SP}$ et h_2 de rapport $\mu = \overrightarrow{SP}/\overrightarrow{SR}$. Alors $h_1 \circ h_2$ est l'homothétie $h_{S,\lambda\mu}$ de centre S et rapport $\lambda\mu$ et envoie $R \mapsto Q$, mais $h_2 \circ h_1 = h_{S,\mu\lambda}$ est la même homothétie (car $\mu\lambda = \lambda\mu$), et envoie $Q' \mapsto R'$; cette homothétie envoie donc (RQ') sur (QR'), et les deux droites sont parallèles.*

Les questions *c,d* ont pour but de montrer que l'énoncé ci-dessus reste vrai même si $\dim \mathcal{A} > 2$. N'abordez ces deux dernières questions que s'il vous reste du temps. On vous demande d'y vérifier soigneusement que, dans tous les cas de figure, soit on peut trouver un plan qui contient toute la configuration donnée, et dans lequel on peut donc appliquer le résultat déjà établi, soit il y a différents points et/ou droites confondus, de sorte que l'énoncé devienne trivialement vrai.

c. On suppose dans cette question que $\dim \mathcal{A}$ est quelconque, et que les points P, Q, R ne sont pas tous égaux. Déduire alors des hypothèses $(PQ') \parallel (QP')$ et $(PR') \parallel (RP')$ que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires.

$\surd$ *Comme (PQ') et (QP') sont parallèles, les points P, Q, P', Q' sont coplanaires, car tous dans $P + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ'}) = Q + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QP'})$, et par le même argument P, R, P', R' sont coplanaires. D'après l'hypothèse on a toujours soit $P \neq Q$ (et donc $P' \neq Q'$) soit $P \neq R$ (et donc $P' \neq R'$), et dans les deux cas on vient d'établir un plan qui contient deux points distincts de $\mathcal{D}$ et deux points distincts de $\mathcal{D}'$, et donc les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ toutes entières.*

d. En déduire le théorème de Pappus dans le cas général.

$\surd$ *Dans le cas où $P = Q = R$, la conclusion du théorème est triviale : on a $(PQ') = (QP')$ et donc $P' = Q'$, pareillement $(PR') = (RP')$ et donc $P' = R'$, et du coup $(RQ') = (QR')$. Dans le cas contraire les droites $\mathcal{D}$ et D' sont coplanaires d'après le point c, et tous les points et droites concernés par le théorème sont par construction dans ce plan affine $\mathcal{A}'$ engendré par $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (c'est vraiment un plan, car $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$). Par conséquent soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles, soit elles se coupent. Alors les points a et b, appliqués en prenant à la place de $\mathcal{A}$ le plan affine $\mathcal{A}'$, complètent la démonstration du le théorème de Pappus.*

Fin.