Corrigé Contrôle continu 6L19 : Géométrie vendredi 16 mars 2012
10h00–12h00

Tous les espaces affines considérés sont définis sur le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels. La droite passant par deux points distincts X, Y est notée (XY) (c'est $\mathcal{D}_{X,Y}$ dans le polycopié).

1. On considère dans le plan affine un triangle non aplati (ABC).

a. Soient (a_1, a_2), (b_1, b_2) et (c_1, c_2) trois couples de nombre réels de sommes non nulles : $a_1+a_2 \neq 0$, $b_1 + b_2 \neq 0$ et $c_1 + c_2 \neq 0$. On désigne par A' le barycentre de $((B, a_1), (C, a_2))$, par B' le barycentre de $((C, b_1), (A, b_2))$ et par C' le barycentre de $((A, c_1), (B, c_2))$. Montrer que les trois points A', B' et C' sont alignés si et seulement si $a_1b_1c_1 = -a_2b_2c_2$.

$\surd$ *En coordonnées barycentriques par rapport au repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$ on a*

$$A' = (0, \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \frac{a_2}{a_1 + a_2}{}_S), \quad B' = (\frac{b_2}{b_1 + b_2}, 0, \frac{b_1}{b_1 + b_2})_S, \quad \text{et} \quad C' = (\frac{c_1}{c_1 + c_2}, \frac{c_2}{c_1 + c_2}, 0)_S.$$

D'après théorème 1.6.1(2), ou plus spécifiquement le cas particulier théorème 1.6.2, ces points sont alignés si et seulement si on a

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{b_2}{b_1+b_2} & \frac{c_1}{c_1+c_2} \\ \frac{a_1}{a_1+a_2} & 0 & \frac{c_2}{c_1+c_2} \\ \frac{a_2}{a_1+a_2} & \frac{b_1}{b_1+b_2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut extraire (par multilinéarité du déterminant) comme facteur commun de chacun des trois colonnes leur dénominateur, qui est commun. Comme les facteurs extraits tels $\frac{1}{a_1+a_2}$ sont visiblement non nuls, ils ne jouent aucun rôle pour l'annulation ou non du déterminant. Cette annulation est donc équivalente à l'annulation du déterminant de la matrice après extraction des facteurs, ce qui donne l'équation $a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 = 0$ ou de façon équivalente $a_1b_1c_1 = -a_2b_2c_2$.

b. Expliquer comment on peut adapter les six nombres $a_1, a_2, \ldots, c_2$, sans changer les positions des points A', B', C', pour obtenir les relations $a_1 + a_2 = 1$, $b_1 + b_2 = 1$ et $c_1 + c_2 = 1$.

$\surd$ *On peut multiplier tous les poids qui figurent dans la même expression de barycentre pondéré par un facteur commun sans changer le point déterminé par cette expression. Pour rendre les masses de ces expressions égale à 1, on divisera chaque poids par la masse de son expression, comme il a été fait pour calculer les coordonnées barycentriques; par exemple on replacera a_1 par $a_1' = \frac{a_1}{a_1+a_2}$.*

c. En supposant maintenant ces relations vérifiées, donner une condition nécessaire et suffisante sur ces nombres pour que les isobarycentres des triangles (ABC) et $(A'B'C')$ soient confondus. [On pourra exprimer A', B', C' en coordonnées barycentriques par rapport a repère $\mathcal{S} = (A, B, C)$.]

$\surd$ *On a $A' = (0, a_1, a_2)_\mathcal{S}$, $B' = (b_2, 0, b_1)$, $C' = (c_1, c_2, 0, 0)$ et donc $\operatorname{bar}(A', B', C') = (\frac{1}{3}(c_1 + b_2, a_1 + c_2, b_1 + a_2))_\mathcal{S}$. Pour que ce point soit égal à $\operatorname{bar}(A, B, C) = (\frac{1}{3}(1, 1, 1))_\mathcal{S}$, il faut et il suffit que $1 = c_1 + b_2 = a_1 + c_2 = b_1 + a_2$, et donc compte tenu des conditions imposées dans la question précédente que $a_1 = c_1 = b_1$ (et par conséquent $a_2 = b_2 = c_2$).*

d. Si ces deux isobarycentres sont confondus, A', B', C' peuvent ils être alignés comme dans la question *a* ?

$\surd$ *En posant $x = a_1 = c_1 = b_1$ et donc $1-x = a_2 = b_2 = c_2$, alors la condition devient $x^3 = -(1-x)^3$ ce qui donne $1-3x+3x^2 = 0$. Ce polynôme quadratique est de discriminant $(-3)^2-4\times 3 = -3 < 0$, et n'a donc pas de racines réelles; les points A', B', C' ne peuvent pas être alignés.*

2. Soit A, B deux points du plan, et p, q des entiers positifs. Décrire une méthode pour construire le barycentre (pondéré) de (A, p) et (B, q) à la règle et au compas. On a le droit de choisir des points ou des droites "libres", par exemple un point qui ne soit pas sur la droite (AB) ; bien évidemment la construction doit être correcte quel que soit ce choix. Indication: on pourra mettre en œuvre le théorème de Thalès.

$\surd$ *L'idée de base est qu'on peut facilement multiplier une longueur donnée par un entier, même si on ne peut pas directement diviser une longueur par un entier : il suffit de reporter avec le compas plusieurs fois la distance donnée sur une droite. Ainsi on pourra construire sur une droite un segment $[X, Y]$ de longueur q fois une longueur donnée, suivi par un segment $[Y, Z]$ de p fois la même longueur. Ainsi le point Y divise le segment $[X, Z]$ selon la proportion voulue. Mais si on peut bien s'organiser pour que $X = A$, on ne peut évidemment pas aussi obtenir $Z = B$. C'est là où le théorème de Thalès est utile : on peut tracer (ZB) et la droite parallèle à celle-ci qui passe par Y ; d'après le théorème cette dernière coupe le segment $[A, B]$ selon la même proportion que $[X, Z]$, c'est à dire en $\mathrm{bar}((A, p), (B, q))$. Pour faire réussir la construction il suffit de choisir une droite passant par A autre que (AB) comme celle où construit les intervalles $[X, Y]$ (avec comme on l'a dit $X = A$) et $[Y, Z]$. Donc en résumé : (1) on choisit un telle droite, (2) on y reporte q fois une longueur fixe (par exemple $d(A, B)$), nommant le point atteint Y, et on continue p fois dans le même sens par la même longueur pour arriver en Z, (3) on trace une droite passant par Y parallèle à (ZB) (en complétant le parallélogramme dont Y, Z, B sont sommets), et (4) on trouve le point cherché comme point d'intersection de cette dernière droite avec (AB).*

3. On se place dans le plan affine noté $\mathcal{A}$. On se donne trois points A, B et C formant un triangle non aplati. On note :

$$\begin{aligned}
A_1 = &\quad \text{le symétrique de } B \text{ par rapport à } C,\\
B_1 = &\quad \text{le symétrique de } C \text{ par rapport à } A,\\
C_1 = &\quad \text{le symétrique de } A \text{ par rapport à } B,\\
A_2 = &\quad \text{le point d'intersection de la droite } (BC) \text{ avec la droite } (B_1C_1),\\
B_2 = &\quad \text{le point d'intersection de la droite } (CA) \text{ avec la droite } (C_1A_1),\\
C_2 = &\quad \text{le point d'intersection de la droite } (AB) \text{ avec la droite } (A_1B_1).
\end{aligned}$$

a. Donner les coordonnées barycentriques de A_1, B_1 et C_1 dans le repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$.

$\surd$ $A_1 = (0, -1, 2)_{\mathcal{S}}$, $B_1 = (2, 0, -1)_{\mathcal{S}}$, $C_1 = (-1, 2, 0)_{\mathcal{S}}$

b. Soit $\mathcal{E} = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ la base de l'espace vectoriel $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$ qu'on peut associer au repère $\mathcal{S}$. Calculer le déterminant par rapport à cette base des vecteurs $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}$: $\det_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1})$.

$\surd$ *On a* $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{(C + \overrightarrow{BC})(A + \overrightarrow{CA})} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} = 2(0, -1)_E - (-1, 1)_E = (1, -3)_{\mathcal{E}}$, *ainsi que* $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{(C + \overrightarrow{BC})(B + \overrightarrow{AB})} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = (1, -1)_E + (1, 0)_E - (-1, 1)_E = (3, -2)_{\mathcal{E}}$. *Alors*

$$\det_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 7$$

c. Donner les coordonnées barycentriques de A_2, B_2 et C_2 dans le repère affine $\mathcal{S}$, et dans le repère affine $\mathcal{S}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ (on commencera par montrer que ces trois points sont non-alignés).

$\surd$ *Comme* $\det_{\mathcal{E}}(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) = 7 \neq 0$ *les points* A_1, B_1, C_1 *ne sont pas alignés. Pour trouver* A_2 *on trouve d'abord les descriptions en coordonnées barycentriques de* (BC) *et* (B_1C_1). *Avec les notations du cours ce sont* $(BC) = [1, 0, 0]_{\mathcal{S}}$ *et* $(B_1C_1) = [2, 1, 4]_{\mathcal{S}}$ *(proposition 1.7.2(1)), et donc* $(BC) \cap (B_1C_1) = \{A_2\} = \{-\frac{1}{3}(0, -4, 1)_{\mathcal{S}}\}$ *(proposition 1.7.2(3)), donc* $A_2 = (0, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})_{\mathcal{S}}$. *De façon similaire (ou plus facilement en vue de la symétrie cyclique des données) on trouve* $B_2 = (-\frac{1}{3}, 0, \frac{4}{3})_{\mathcal{S}}$ *et* $C_2 = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0)_{\mathcal{S}}$. *Pour trouver les coordonnées barycentriques de ces points dans le repère affine* $\mathcal{S}_1$, *on peut observer que* A_2 *se trouve par définition sur la droite* (B_1C_1) *et aura donc première coordonnée 0 dans* $\mathcal{S}_1$, *c'est-à-dire* $A_2 = (0, x, 1 - x)_{\mathcal{S}_1}$ *pour un certain* x, *qu'on résout facilement à l'aide de* $B_1 = (2, 0, -1)_{\mathcal{S}}$, $C_1 = (-1, 2, 0)_{\mathcal{S}}$, *et* $A_2 = (0, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})_{\mathcal{S}}$ *comme* $x = \frac{1}{3}$. *Ainsi on trouve*

$$\begin{aligned}
A_2 &= (0, \tfrac{4}{3}, -\tfrac{1}{3})_{\mathcal{S}} & B_2 &= (-\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{4}{3})_{\mathcal{S}} & C_2 &= (\tfrac{4}{3}, -\tfrac{1}{3}, 0)_{\mathcal{S}}\\
&= (0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})_{\mathcal{S}_1} & &= (\tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{3})_{\mathcal{S}_1} & &= (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, 0)_{\mathcal{S}_1}
\end{aligned}$$

d. En déduire que les trois triangles (ABC), $(A_1B_1C_1)$ et $(A_2B_2C_2)$ ont même centre de gravité.

$\surd$ *On calcule facilement* $\mathrm{bar}(A,B,C) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})_S = \mathrm{bar}(A_1,B_1,C_1) = \mathrm{bar}(A_2,B_2,C_2)$ *avec les coordonnées explicites trouvées dans les question précédentes, ou si on veut dans le repère* $\mathcal{S}_1$ *que* $\mathrm{bar}(A_1,B_1,C_1) = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})_{S_1} = \mathrm{bar}(A_2,B_2,C_2)$. *Le fait que les coordonnées des trois points sont toujours reliées par permutations cycliques fait que le calcul de l'isobarycentre donne, en chaque position, toujours* $\frac{1}{3}$ *fois la somme des trois coordonnées, et cette somme est obligatoirement* 1.

e. Donner un algorithme explicite de reconstruction du triangle (ABC) à partir du seul triangle $(A_1B_1C_1)$. On pourra se servir de la construction de la question **2**.

$\surd$ *On commencera par la construction des points*

$$A_2 = \mathrm{bar}((B_1,1),(C_1,2)), \quad B_2 = \mathrm{bar}((C_1,1),(A_1,2)), \quad \textit{et} \quad C_2 = \mathrm{bar}((A_1,1),(B_1,2))$$

par la méthode de la question **2** *avec* $p = 1$, $q = 2$. *Ensuite on trace les droites* (A_1A_2), (B_1B_2) *et* (C_1C_2), *qui forment les côtés du triangle* (ABC) *(ses sommets sont les points d'intersection de deux des trois droites). (On pourra remarquer pour le premier pas qu'il existe une méthode plus simple de construire* $\mathrm{bar}((X,1),(Y,2))$ *que celle de la question* **2***: on choisit un point* $P \notin (XY)$, *on construit le point* Q *symétrique de* P *par rapport à* Y, *et on trouve le barycentre cherché comme l'isobarycentre du triangle* (XPQ), *pour lequel il suffit de coupe la médiane* (XY) *avec l'un des deux médianes restantes du triangle, qui sont facile à construire.)*

Fin.