Examen 6L19 : Géométrie 28 avril 2010
9h00–12h00

L'utilisation de tout document ou calculatrice est interdite

1. On se place dans un plan affine. Soient A, B, C et A', B', C' deux triangles avec $A' \neq A$, $B' \neq B$ et $C' \neq C$, et tels que $\mathcal{D}_{A,B} \parallel \mathcal{D}_{A',B'}$ et $\mathcal{D}_{A,C} \parallel \mathcal{D}_{A',C'}$, et que $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ soient distincts.

Le but de cet exercice est de démontrer l'énoncé suivant (connu comme étant la version affine du théorème de Desargues) : les droites $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si les droites $\mathcal{D}_{B,C}$ et $\mathcal{D}_{B',C'}$ sont parallèles.

1. a. Montrer que si $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ sont parallèles, alors $\mathcal{D}_{B,C} \parallel \mathcal{D}_{B',C'}$.
b. Montrer que si $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ sont concourantes, alors $\mathcal{D}_{B,C} \parallel \mathcal{D}_{B',C'}$.

2. On suppose dans cette question que $\mathcal{D}_{B,C}$ est parallèle à $\mathcal{D}_{B',C'}$. Montrer que si parmi les droites $\mathcal{D}_{A,A'}$, $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$, deux d'entre elles se coupent en un point, alors les trois droites sont concourantes. *(On pourra supposer que les droites $\mathcal{D}_{A,A'}$ et $\mathcal{D}_{B,B'}$ se coupent en un point I et considérer une homothétie de centre I qui stabilise la droite $\mathcal{D}_{C,C'}$.)*

3. Conclure en démontrant la version affine du théorème de Desargues.

2. Dans un plan affine euclidien, on considère un triangle A, B, C, isocèle en A. Soient P un point du segment $[B, C]$ et Δ la perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}_{B,C}$ passant par P. On note I le point d'intersection des droites Δ et $\mathcal{D}_{A,B}$ et J le point d'intersection des droites Δ et $\mathcal{D}_{A,C}$.

Le but de cet exercice est de montrer que la quantité $d(P, I) + d(P, J)$ est constante, c'est-à-dire indépendante du choix d'un point P sur le segment $[B, C]$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite parallèle à $\mathcal{D}_{B,C}$ passant par A et soit σ la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$. Si M est un point du plan, on notera M' son image par σ.

1. a. Expliquer pourquoi les angles de droites $\widehat{\mathcal{D}_{B',A}\mathcal{D}}$, $\widehat{\mathcal{D}\mathcal{D}_{A,B}}$ et $\widehat{\mathcal{D}_{B,C}\mathcal{D}_{A,B}}$ sont égaux.
b. En déduire : $\mathcal{D}_{A,C} = \mathcal{D}_{A,B'}$.

2. a. À l'aide de la question *1.b*, montrer que J est l'image de I par σ.
b. En déduire que $d(P, I) = d(P', J)$ puis que $d(P, I) + d(P, J) = d(P, P')$.

3. Conclure.

3. On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soient r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et t la translation de vecteur $\vec{\imath}$. Montrer que les applications affines $r \circ t$, $t \circ r$ et $t \circ r \circ t^{-1}$ sont des rotations de $\mathcal{P}$; pour chacune d'elles, préciser son angle et son centre.

4. On rappelle qu'une *symétrie* d'un espace affine $\mathcal{A}$ est une application affine $s : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ telle que $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Pour un sous-espace affine $\mathcal{F}$ et un sous-espace vectoriel G supplémentaire de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ dans $E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$, la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ et de direction G est donnée par $A \mapsto A + 2\overrightarrow{Ap(A)}$ où p est la projection sur $\mathcal{F}$ parallèle à G. Toute symétrie de $\mathcal{A}$ est de cette forme (on l'admet).

Soit $\mathcal{A}$ un espace affine de dimension 3. On dit qu'une application affine f de $\mathcal{A}$ est une *symétrie-translation* s'il existe une symétrie s et une translation t telles que $f = s \circ t = t \circ s$. Si $\vec{u}$ est un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, on notera $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

1. Soient $\mathcal{F}$ et G comme ci-dessus, et soit s la symétrie par rapport à $\mathcal{F}$ et de direction G. Si $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{A}}$, montrer que $s \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s$ si et seulement si $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$.

2. Soit f une symétrie-translation. Montrer que le couple (s, t), où s est une symétrie et t une translation telles que $f = s \circ t = t \circ s$, est unique.

 continué au verso

3. Soit f une application affine de $\mathcal{A}$ telle que $f \circ f = t_{2\vec{u}}$. On pose $s = f \circ t_{\vec{u}}^{-1} = f \circ t_{-\vec{u}}$.

a. Montrer que s et $t_{2\vec{u}}$ commutent.

b. Montrer que l'application linéaire associée à s est une symétrie vectorielle dont l'espace des vecteurs fixes contient $\vec{u}$.

c. En déduire que s est une symétrie de $\mathcal{A}$, puis que $f = s \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \circ s$.

4. En utilisant la question *3*, montrer qu'une application affine f est une symétrie-translation si et seulement si $f \circ f$ est une translation.

5. Déduire de la question *4* que la composée d'une symétrie et d'une translation quelconques est une symétrie-translation.

6. Application : décomposer l'application affine f dont la forme analytique dans un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{A}$ est donnée par

$$f((x,y,z)_{\mathcal{R}}) = \big((x-2y-2z+1)/3, (-2x+y-2z+2)/3, (-2x-2y+z-1)/3\big)_{\mathcal{R}}$$

en la composée d'une symétrie et d'une translation.

Fin.