Le but de ce devoir est d'étudier en détail quelques aspects des applications affines. Certains sont déjà vus en cours ou aux TD, auquel cas vous pouvez utiliser les arguments employés à cette occasion.

1. On rappelle qu'une application $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ entre espaces affines (définis sur le même corps K) est affine s'il existe une application linéaire $\overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}'}$, qui sera notée $\vec{f}$, telle que $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ pour tout $A, B \in \mathcal{A}$.

a. Montrer que cette condition est équivalente à : il existe un point $A \in \mathcal{A}$ et une application linéaire $\vec{f} : \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}'}$ tels que $f(A + \vec{x}) = f(A) + \vec{f}(\vec{x})$ pour tout $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathcal{A}}$. (C'est le même $\vec{f}$.)

$\surd$ *En prenant $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ dans la dernière formule elle donne $f(B) = f(A) + \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ c'est-à-dire $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ comme dans la définition. Mais cela ne montre pas encore l'équivalence, car la définition exige la formule pour tout $A \in \mathcal{A}$, pendant que la nouvelle forme l'exige que pour un seul point A. Certainement la dernière formule sera vérifiée pour f affine ; il reste à montrer que tout f qui vérifie la formule pour un seul point A vérifiera aussi la définition d'affine pour toute paire de points (qu'on appellera B, C pour éviter confusion avec le point particulier A). En posant $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$ on a $\overrightarrow{f(B)f(C)} = \overrightarrow{f(B)f(A)} + \overrightarrow{f(A)f(C)} = -\vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y}) = \vec{f}(\vec{y} - \vec{x})$ car $\vec{f}$ est linéaire ; or $\vec{y} - \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ d'où on obtient l'égalité cherchée $\overrightarrow{f(B)f(C)} = \vec{f}(\overrightarrow{BC})$.*

b. En utilisant cette nouvelle caractérisation d'applications affines, vérifier que pour $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affine, et toute collection $X = \big((A_1, \mu_1), \ldots, (A_n, \mu_n)\big)$ de points de $\mathcal{A}$ pondérés, de masse non nulle, on a $f(\operatorname{bar}(X)) = \operatorname{bar}\big((f(A_1), \mu_1), \ldots, (f(A_n), \mu_n)\big)$.

$\surd$ *Appelant le barycentre dans le second membre de cette équation B, on a d'après le formule du barycentre, basée en $f(A)$, que $\overrightarrow{f(A)B} = \frac{1}{\mu(X)} \sum_{i=1}^n \mu_i \overrightarrow{f(A)f(A_i)} = \frac{1}{\mu(X)} \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{f}(\overrightarrow{AA_i})$ par la caractérisation d'applications affines, ce qui s'écrit $\vec{f}(\frac{1}{\mu(X)} \sum_{i=1}^n \mu_i \overrightarrow{AA_i})$ par linéarité de $\vec{f}$, et c'est $\vec{f}(\overrightarrow{A\operatorname{bar}(X)}) = \overrightarrow{f(A)f(\operatorname{bar}(X))}$ en utilisant encore la caractérisation ; on obtient $B = f(\operatorname{bar}(X))$.*

c. Montrer que si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est une application affine et $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ un sous-espace affine de $\mathcal{A}$, alors l'image $f(\mathcal{V}) = \{\, f(v) \mid v \in \mathcal{V} \,\}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{A}'$.

$\surd$ *Un sous-ensemble non vide d'un espace affine est un sous-espace affine si et seulement s'il est fermé pour l'opération de barycentre (pour des collections de masse non nulle). Une telle collection de points pondérés de $f(\mathcal{V})$ est de la forme $Y = \big((f(A_1), \mu_1), \ldots, (f(A_n), \mu_n)\big)$ avec les $A_i \in \mathcal{V}$. D'après le point précédent on a $\operatorname{bar}(Y) = f(\operatorname{bar}(X))$ où $X = \big((A_1, \mu_1), \ldots, (A_n, \mu_n)\big)$ est une collection de masse non nulle de points pondérés de $\mathcal{V}$; alors $\operatorname{bar}(X) \in \mathcal{V}$, et $\operatorname{bar}(Y) \in f(\mathcal{V})$.*

d. Montrer que dans cette situation la direction $\overrightarrow{f(\mathcal{V})}$ de $f(\mathcal{V})$ est égal à l'image $\vec{f}(\overrightarrow{\mathcal{V}})$ par $\vec{f}$ de la direction $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ (c'est-à-dire à $\{\, \vec{f}(v) \mid v \in \overrightarrow{\mathcal{V}} \,\}$), et que $\dim(f(\mathcal{V})) \leq \dim(\mathcal{V})$.

$\surd$ *En fixant $A \in \mathcal{V}$, on a $\overrightarrow{\mathcal{V}} = \{\, \overrightarrow{AB} \mid B \in \mathcal{V} \,\}$, et $\vec{f}(\overrightarrow{\mathcal{V}}) = \{\, \vec{f}(\overrightarrow{AB}) \mid B \in \mathcal{V} \,\} = \{\, \overrightarrow{f(A)f(B)} \mid B \in \mathcal{V} \,\}$, ce qu'on peut écrire comme $\{\, \overrightarrow{f(A)P} \mid P \in f(\mathcal{V}) \,\} = \overrightarrow{f(\mathcal{V})}$. Si $v_1, \ldots, v_d$ est une famille génératrice de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$, alors $\vec{f}(v_1), \ldots, \vec{f}(v_d)$ est une famille génératrice de $\vec{f}(\overrightarrow{\mathcal{V}}) = \overrightarrow{f(\mathcal{V})}$, et on peut réaliser cela avec $d = \dim \mathcal{V}$ (en prenant pour $v_1, \ldots, v_d$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$) ; la famille génératrice de $\overrightarrow{f(\mathcal{V})}$ obtenue montre que $\dim(f(\mathcal{V})) = \dim(\overrightarrow{f(\mathcal{V})}) \leq \dim(\mathcal{V})$.*

2. Soit $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$ une sous-espace affine, et $W \subseteq E = \overrightarrow{\mathcal{A}}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire à la direction $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{V}$ (donc $E = \overrightarrow{\mathcal{V}} \oplus W$). Dans cette partie on précisera la définition de la projection $p : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ parallèle à W, et on montrera que c'est une application affine.

a. Soit $A \in \mathcal{A}$ un point quelconque. Montrer qu'il existe un point unique B tel que $B \in \mathcal{V}$ et $\overrightarrow{AB} \in W$. On définit $p : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ en posant $p(A) = B$ dans cette situation.

$\surd$ *On fixe un point $P \in \mathcal{V}$. Si on écrit $B = P + \vec{x}$, la condition $B \in \mathcal{V}$ est équivalente à $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$, et $\overrightarrow{AB} \in W$ donne $\vec{x} - \overrightarrow{PA} \in W$. Appelant ce dernier vecteur $\vec{y}$, la recherche d'un point B est donc équivalent à la recherche de vecteurs $x \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $y \in W$ tels que $\overrightarrow{PA} = \vec{x} - \vec{y}$. La condition $E = \overrightarrow{\mathcal{V}} \oplus W$ dit que, quel que soit le vecteur $\overrightarrow{PA} \in E$, ce problème a une solution unique, et par conséquent pour chaque A il y a un unique point B qui vérifie les conditions.*

b. Vérifier la relation $p \circ p = p$ pour cette application, et le fait qu'elle est surjective (en tant qu'application $\mathcal{A} \to \mathcal{V}$).

$\surd$ *Tout point $C \in \mathcal{V}$ vérifie évidemment aussi $\overrightarrow{CC} = \vec{0} \in W$, ce qui montre que $C = p(C)$. Alors tout point de $\mathcal{V}$ a au moins un antécédent (lui même), ce qui prouve la surjectivité de $p : \mathcal{A} \to \mathcal{V}$. En prenant $C = p(A)$ où $A \in \mathcal{A}$, on obtient $p(p(A)) = p(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, et donc $p \circ p = p$.*

c. Rappeler la définition de la projection (vectorielle) $\pi : E \to \overrightarrow{\mathcal{V}}$ parallèle à W.

$\surd$ *Comme par hypothèse $E = \overrightarrow{\mathcal{V}} \oplus W$, tout élément de E s'écrit de façon unique sous la forme $v + w$ avec $v \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $w \in W$. Alors on peut définir π par $\pi(v + w) = v$ pour $v \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $w \in W$.*

d. Soit $P \in \mathcal{V}$ un point quelconque. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $p(A) = P + \pi(\overrightarrow{PA})$.

$\surd$ *On a vu que $p(A) = P + \vec{x}$ où la décomposition de $\overrightarrow{PA}$ selon $E = \overrightarrow{\mathcal{V}} \oplus W$ est $\overrightarrow{PA} = \vec{x} - \vec{y}$ (c'est-à-dire $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathcal{V}}$ et $-\vec{y} \in W$). Mais cela veut dire que $\vec{x} = \pi(\overrightarrow{PA})$, d'où $p(A) = P + \pi(\overrightarrow{PA})$.*

e. En déduire que pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ on a $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \pi(\overrightarrow{AB})$, c'est-à-dire que p est une application affine, et que π est l'application linéaire associée.

$\surd$ $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{(P + \pi(\overrightarrow{PA}))(P + \pi(\overrightarrow{PB}))} = \pi(\overrightarrow{PB}) - \pi(\overrightarrow{PA}) = \pi(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) = \pi(\overrightarrow{AB})$.

3. *a.* Montrer qu'une application $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ affine est injective si et seulement si l'application linéaire associée $\vec{f} : \overrightarrow{\mathcal{A}} \to \overrightarrow{\mathcal{A}'}$ est injective. Montrer la même propriété pour "surjectif" au lieu de "injectif". En déduire la propriété pour "bijectif".

$\surd$ *Fixons $P \in \mathcal{A}$, et posons $Q = f(P) \in \mathcal{A}'$. Alors pour $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}'$ on a la relation $f(A) = B$ si et seulement si on a $\vec{f}(\overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{QB}$. Comme $\overrightarrow{PA}$ parcourt $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ quand A parcourt $\mathcal{A}$ et vice versa (c'est-à-dire $A \mapsto \overrightarrow{PA}$ est une bijection $\mathcal{A} \to \overrightarrow{\mathcal{A}}$), ceci veut dire que les antécédents de B sous f sont en bijection avec les antécédents de $\overrightarrow{QB}$ sous $\vec{f}$. En particulier la condition que aucun $B \in \mathcal{A}'$ n'a plus qu'un antécédent sous f (c'est-à-dire f injectif) est équivalent à aucun $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}'$ n'a plus qu'un antécédent sous $\vec{f}$ (c'est-à-dire $\vec{f}$ injectif), car on peut prendre $v = \overrightarrow{QB}$. De façon similaire la condition que tout $B \in \mathcal{A}'$ a au moins un antécédent sous f (c'est-à-dire f surjectif) est équivalent à aucun $v \in \overrightarrow{\mathcal{A}}'$ a au moins u antécédent sous $\vec{f}$ (c'est-à-dire $\vec{f}$ surjectif). Dire que f est bijectif dit que f est à la fois injectif et surjectif, et cela sera le cas si et seulement si c'est le cas pour $\vec{f}$.*

b. Soit $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{A}$, et $P_0, P_1, \ldots, P_n$ des points quelconques de $\mathcal{A}'$. Montrer qu'il existe une application affine $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, et une seule, telle que $f(A_i) = P_i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$.

$\surd$ *Tout $A \in \mathcal{A}$ s'écrit de façon unique sous la forme $A = A_0 + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{A_0A_i}$ avec $c_1, \ldots, c_n \in K$. Une application affine $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ doit vérifier $f(A) = f(A_0) + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{f(A_0)f(A_i)}$ et si on a $f(A_i) = P_i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$ cela s'écrit $f(A) = P_0 + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{P_0P_i}$. Ainsi cette formule définit le seul candidat f pour une application comme spécifiée. Pour prouver qu'il est en effet affine, on affirme que $\vec{f}$ est égal à l'unique application linéaire ϕ qui sur la base vectorielle $\overrightarrow{A_0A_i}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_i}$ prend les valeurs $\phi(\overrightarrow{A_0A_i}) = \overrightarrow{P_0P_i}$. On applique la caractérisation de **1***a avec $A = A_0$, en calculant $f(A_0 + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{A_0A_i}) = P_0 + \sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{P_0P_i} = f(A_0) + \sum_{i=1}^n c_i \phi(\overrightarrow{A_0A_i}) = f(A_0) + \phi(\sum_{i=1}^n c_i \overrightarrow{A_0A_i})$.*

c. Dans la situation du point précédent, montrer que l'application affine f est surjective si et seulement si la famille de points $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ engendre $\mathcal{A}'$, c'est-à-dire si $\mathrm{Aff}(P_0, P_1, \ldots, P_n) = \mathcal{A}'$; que f est injective si et seulement si cette famille est affinement libre dans $\mathcal{A}'$; et que f est bijective si et seulement si cette famille forme un repère affine de $\mathcal{A}'$.

$\surd$ *D'après le point précédent l'image de $\vec{f}$ est l'espace vectoriel V engendré par $\overrightarrow{P_0P_i}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_i}$, ce qui est la direction de $\mathrm{Aff}(P_0, P_1, \ldots, P_n)$; alors $\vec{f}$, ou de façon équivalente f, est surjectif si et seulement si $V = \overrightarrow{\mathcal{A}}'$, ce qui n'arrive que si $\mathrm{Aff}(P_0, P_1, \ldots, P_n) = \mathcal{A}'$. La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est affinement libre si la famille de vecteurs $\overrightarrow{P_0P_i}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_i}$ est libre, et d'après la définition de ϕ ci-dessus cela veut dire que $\ker(\vec{f}) = \{\vec{0}\}$ et donc que $\vec{f}$ est injectif, et on a vu que c'est équivalent à f injectif. Pour la bijectivité il suffit de remarquer qu'un repère affine est une famille de points qui est libre et engendre l'espace.*

d. Sous lesquelles de ces conditions peut-on renforcer l'inégalité $\dim(f(\mathcal{V})) \leq \dim(\mathcal{V})$ du point **1***d* à une égalité : $\dim(f(\mathcal{V})) = \dim(\mathcal{V})$?

$\surd$ *Dans ce point on avait on avait obtenu une famille génératrice de $\overrightarrow{f(\mathcal{V})}$ à $d = \dim(\mathcal{V})$ éléments en appliquant $\vec{f}$ à une base de $\overrightarrow{\mathcal{V}}$. Cette famille sera en plus libre, et donc un base de $\overrightarrow{f(\mathcal{V})}$ si $\vec{f}$ (et donc f) est injectif, (et en particulier aussi si f est bijectif) ; dans ce cas $\dim(f(\mathcal{V})) = \dim(\mathcal{V})$. L'argument montre qu'on pourra éventuellement être plus précis en disant que $\dim(f(\mathcal{V})) = \dim(\mathcal{V})$ précisément si la restriction de f à $\mathcal{V}$ est injective (une condition plus faible que f injectif).*

Fin.