Contrôle continu 6L19 : Géométrie 4 mars 2009

8h15–10h15

Les documents et calculatrices sont **interdits**

Les trois parties sont dépendantes : les parties 2 et 3 reprennent la situation des parties précédentes.

1. Soit A, B, C trois points non alignés dans un plan affine $\mathcal{A}$. On munit $\mathcal{A}$ de ce repère affine $\mathcal{S} = (A, B, C)$, de sorte que chaque point de $\mathcal{A}$ puisse être écrit en coordonnées barycentriques sous la forme $(x, y, z)_\mathcal{S}$ avec $x + y + z = 1$, et chaque vecteur dans $\overrightarrow{\mathcal{A}}$ sous la forme $v(s, t, u)_\mathcal{S}$ avec $s + t + u = 0$. On rappelle aussi la notation $[\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S}$ (avec α, β, γ pas tous égaux) pour la droite $\{ (x, y, z)_\mathcal{S} \mid x + y + z = 1, \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \}$.

On choisit des points $a \in \mathcal{D}_{B,C}$, $b \in \mathcal{D}_{C,A}$ et $c \in \mathcal{D}_{A,B}$, qu'on supposera chacun distinct des points A, B, et C.

a. Expliquer pourquoi on peut exprimer ces points en coordonnées barycentriques en fonction de trois variables λ, μ, ν comme

$$a = (0, \lambda, 1 - \lambda)_\mathcal{S},$$
$$b = (1 - \mu, 0, \mu)_\mathcal{S},$$
$$c = (\nu, 1 - \nu, 0)_\mathcal{S},$$

et indiquer quelles sont les valeurs interdites pour λ, μ, et ν.

b. Exprimer les droites $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$ et $\mathcal{D}_{C,c}$ en coordonnées sous la forme $[\cdot, \cdot, \cdot]_\mathcal{S}$.

c. Exprimer également les droites $\mathcal{D}_{b,c}$, $\mathcal{D}_{c,a}$, et $\mathcal{D}_{a,b}$ sous cette forme.

2. On supposera dans la suite que a, b et c ne sont pas alignés (donc $\mathcal{D}_{b,c}$, $\mathcal{D}_{c,a}$, et $\mathcal{D}_{a,b}$ sont distinctes), et en plus que $\mathcal{D}_{b,c}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{D}_{B,C}$, ni $\mathcal{D}_{c,a}$ parallèle à $\mathcal{D}_{C,A}$, ni $\mathcal{D}_{a,b}$ parallèle à $\mathcal{D}_{A,B}$.

a. Montrer que deux droites $[\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S}$ et $[\alpha', \beta', \gamma']_\mathcal{S}$ sont parallèles si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

[Indication: un vecteur $v(s, t, u)_\mathcal{S}$ est dans la direction de la droite $[\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S}$ si et seulement si $\alpha s + \beta t + \gamma u = 0$; on peut alors donner un système d'équations exprimant qu'un vecteur est à la fois dans les directions des deux droites.]

b. Appliquer cette formule aux droites $\mathcal{D}_{b,c}$, $\mathcal{D}_{c,a}$, et $\mathcal{D}_{a,b}$ pour exprimer en termes de λ, μ, ν les hypothèses données de non-parallélisme avec respectivement $\mathcal{D}_{B,C}$, $\mathcal{D}_{C,A}$, et $\mathcal{D}_{A,B}$.

Si deux droites ne sont pas parallèles, on admettra la formule suivante (donnée dans le cours) pour leur point d'intersection : $[\alpha, \beta, \gamma]_\mathcal{S} \cap [\alpha', \beta', \gamma']_\mathcal{S} = \{ \frac{1}{d}(\beta\gamma' - \gamma\beta', \gamma\alpha' - \alpha\gamma', \alpha\beta' - \beta\alpha')_\mathcal{S} \}$, où $d = \beta\gamma' - \gamma\beta' + \gamma\alpha' - \alpha\gamma' + \alpha\beta' - \beta\alpha'$ est égal au déterminant mentionné ci-dessus (par conséquent, le facteur $\frac{1}{d}$ rend la somme des coordonnées égale à 1).

c. Exprimer en coordonnées barycentriques le point d'intersection P de $\mathcal{D}_{B,C}$ et $\mathcal{D}_{b,c}$, ainsi que le point d'intersection Q de $\mathcal{D}_{C,A}$ et $\mathcal{D}_{c,a}$ et le point d'intersection R de $\mathcal{D}_{A,B}$ et $\mathcal{D}_{a,b}$.

3. Dans la situation ci-dessus, on souhaite démontrer l'énoncé suivant (un cas particulier du théorème de Desargues) : Les droites $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$ et $\mathcal{D}_{C,c}$ sont concourantes ou parallèles si et seulement si les points P, Q, R sont alignés.

a. Exprimer la condition que les droites $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$ et $\mathcal{D}_{C,c}$ sont concourantes ou parallèles en termes de λ, μ, ν.

b. Exprimer la condition que les points P, Q, R sont alignés en termes de λ, μ, ν.

c. Montrer l'équivalence des conditions des deux points précédents, sous l'hypothèse (déjà donnée ci-dessus) que a, b et c ne sont pas alignés. [Indication : il est nécessaire d'utiliser cette hypothèse, car dans le cas contraire (si a, b et c étaient alignés) P, Q, R seraient alignés (sur la même droite que a, b et c), malgré le fait que $\mathcal{D}_{A,a}$, $\mathcal{D}_{B,b}$, et $\mathcal{D}_{C,c}$ ne sont ni concourantes ni parallèles.]

Fin.