Examen 3L05 : Algèbre Multilinéaire mercredi 20 juin 2012
14h–17h

Les documents ne sont pas autorisés.

Les parties sont indépendantes.

On rappelle que pour une matrice A de taille $n \times n$ à coefficients dans un corps K, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme unitaire $\det(XI_n - A)$.

1. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^4$, vérifiant $f \circ f = f - \mathrm{Id}_E$.

a. Soit v un vecteur non nul de E. Montrer que $v, f(v)$ forme une famille libre.

b. Soit w un vecteur de $E \setminus \mathrm{Vect}(v, f(v))$. Montrer que $(v, f(v), w, f(w))$ est une base de E.

c. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

2. Soit $c \in \mathbf{R}$, et $M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c+2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2c+1 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique χ_M de M en fonction du paramètre c.

b. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles M est trigonalisable (sur $\mathbf{R}$).

c. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles χ_M est scindé à racines simples.

d. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles M est diagonalisable (sur $\mathbf{R}$).

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que A est diagonalisable et déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

b. Soit g un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $g \circ g = f$.
Si v est un vecteur propre de f, montrer que $g(v)$ est également un vecteur propre de f

c. Montrer que v est un vecteur propre de g.
Quelle relation existe-t-il entre sa valeur propre pour f et celle pour g ?

d. En déduire qu'il existe exactement quatre matrices X telles que $X^2 = A$ (il n'est pas demandé de les expliciter).

4. On veut résoudre en trois fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = & 7\,x(t) + 2\,y(t) - 2\,z(t) \\ y'(t) = & -\,x(t) + 2\,y(t) \\ z'(t) = & 11\,x(t) + 5\,y(t) - 3\,z(t) \end{cases}$$

a. Écrire ce système sous forme matricielle $V'(t) = M \cdot V(t)$.

b. Montrer que la matrice M est diagonalisable.

c. Préciser une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$M = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Sans calculer le déterminant de P, justifier l'inversibilité de la matrice P.

d. Montrer que les triplets solutions de $V'(t) = M \cdot V(t)$ s'écrivent

$$V(t) = \lambda_1 e^t V_1 + \lambda_2 e^{2t} V_2 + \lambda_3 e^{3t} V_3$$

où $V_1, V_2, V_3 \in \mathbf{R}^3$ sont des vecteurs que l'on précisera.

Fin.