Corrigé Examen 3L05 : Algèbre Multilinéaire mercredi 20 juin 2012
14h–17h

On rappelle que pour une matrice A de taille $n \times n$ à coefficients dans un corps K, on appelle polynôme caractéristique de A le polynôme unitaire $\det(XI_n - A)$.

1. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbf{R}^4$, vérifiant $f \circ f = f - \mathrm{Id}_E$.

a. Soit v un vecteur non nul de E. Montrer que $v, f(v)$ forme une famille libre.

$\surd$ *La condition donnée dit que le polynôme $X^2 - X + 1$ "annule" A (c'est-à-dire la substitution de A dans le polynôme donne la matrice nulle), et par conséquent ce polynôme annule aussi toutes les valeurs propres de A (on le voit en considérant un vecteur propre, ou parce que les valeurs propres sont racines du polynôme minimal qui divise $X^2 - X + 1$). Or $X^2 - X + 1$ n'a pas de racines réelles (discriminant $-3 < 0$), donc A n'a pas de valeurs propres réelles, ce qui veut dire que $f(v) \in \mathbf{R}^4$ ne peut pas être un multiple de $v \neq 0$, donc $(v, f(v))$ forme une famille libre.*

b. Soit w un vecteur de $E \setminus \mathrm{Vect}(v, f(v))$. Montrer que $(v, f(v), w, f(w))$ est une base de E.

$\surd$ *D'après la question précédente les deux couples $(v, f(v))$ et $(w, f(w))$ sont individuellement libres. Aussi on a vu qu'il n'existe pas de vecteurs propres, et donc pas de sous-espaces f-stables de dimension 1. D'autre part les espaces $V = \mathrm{Vect}(v, f(v))$ et $W = \mathrm{Vect}(w, f(w))$ de dimension 2 sont f stables (car $f(f(v)) = f(v) - v$ par la relation donnée, et pareil pour w), et ils sont distincts car $w \notin V$. Alors $V \cap W$, étant f-stable, est de dimension 0, et on a $E = V \oplus W$. La réunion des bases $(v, f(v))$ de V et $(w, f(w))$ de W forme alors une base de E.*

c. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

$\surd$ *On a déjà remarqué que $f(f(v)) = f(v) - v$ et pareil pour w, d'où la matrice est*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Soit $c \in \mathbf{R}$, et $M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c+2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -2c+1 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le polynôme caractéristique χ_M de M en fonction du paramètre c.

$\surd$

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ -c-2 & X+1 & 5 \\ 0 & -1 & X+2c-1 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X+1 & 5 \\ -1 & X+2c-1 \end{vmatrix} = X(X^2 + 2cX + 2c + 4)$$

b. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles M est trigonalisable (sur $\mathbf{R}$).

$\surd$ *Pour que M soit trigonalisable, il faut et il suffit que χ_M soit scindé. Un vue de la factorisation partielle, cela revient à la condition que $X^2 + 2cX + 2c + 4$ soit scindé, donc de discriminant $\Delta \geq 0$. On a $\Delta = 4c^2 - 4(2c+4) = 4(c^2 - 2c - 4)$ et on a donc explicitement la condition $0 \leq c^2 - 2c - 4 = (c-1)^2 - 5 = (c - 1 - \sqrt{5})(c - 1 + \sqrt{5})$, qui est vérifiée pour $c \leq 1 - \sqrt{5}$ et pour $c \geq 1 + \sqrt{5}$.*

c. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles χ_M est scindé à racines simples.

$\surd$ *Pour que χ_M soit scindé à racines simples, il faut que le facteur $X^2 + 2cX + 2c + 4$ soit scindé sans racine double, et sans racine 0 (car une telle racine serait double dans $\chi_M = X(X^2 + 2cX + 2c + 4)$). Une racine double se produit quand $\Delta = 0$, c'est-à-dire quand $c = 1 \pm \sqrt{5}$, et une racine 0 se produit quand $2c + 4 = 0$, c'est-à-dire quand $c = -2$. Alors χ_M est scindé à racines simples si soit $c < 1 - \sqrt{5}$ avec $c \neq -2$, soit $c > 1 + \sqrt{5}$.*

d. Déterminer les valeurs de c pour lesquelles M est diagonalisable (sur $\mathbf{R}$).

$\surd$ *Si χ_M est scindé à racines simples, alors M est certainement diagonalisable. Dans les trois cas où χ_M est scindé mais avec une racine double, M peut toujours être diagonalisable, mais seulement si l'espace propre associé à cette racine double est de dimension 2. Pour $c = -2$ la racine double est $\lambda = 0$ et on a*

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

qui est visiblement de rang 1, donc l'espace propre est bien de dimension 2 dans ce cas (deux vecteurs propres indépendants pour $\lambda = 0$ sont $(1,0,0)$ et $(0,5,-1)$). Pour les deux valeurs $c = 1 \pm \sqrt{5}$ pour lesquelles le discriminant de $X^2+2cX+2c+4$ s'annule on a $X^2+2cX+2c+4 = (X+c)^2$ (justement à cause de cette annulation il n'y a pas de terme restant) et la racine double est $\lambda = -c$. Alors

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ c+2 & -1+c & -5 \\ 0 & 1 & -c+1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } c = 1 \pm \sqrt{5},$$

qui est visiblement de rang ≥ 2 (par exemple les deux premières colonnes sont indépendantes), donc l'espace propre n'est que de dimension 1 (on sait qu'il ne peut pas être de dimension 0, et en fait on peut trouver un vecteur propre $(0, c-1, 1)$, mais cela est inutile pour répondre à la question). Dans ces cas la matrice M n'est donc pas diagonalisable. En conclusion M est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ si et seulement si soit $c < 1 - \sqrt{5}$, soit $c > 1 + \sqrt{5}$.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que A est diagonalisable et déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs propres de f.

$\surd$ *Le polynôme caractéristique est $\chi_A = (X-1)\big((X-8)(X-1) - 4 \times 2\big) = (X-1)X(X-9)$, qui est donc scindé à racines simples $0, 1, 9$. On peut trouver des vecteurs propres pour ces trois valeurs propres en comme des vecteurs v_i annulés par $A - \lambda_i I$ pour $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, et $\lambda_3 = 9$, et on trouve par exemple $v_1 = (0,1,-2)$, $v_2 = (1,-1,1)$, $v_3 = (0,4,1)$; comme des vecteurs propres pour des valeurs propres distincts sont toujours linéairement indépendantes, c'est une base formée de vecteurs propres.*

b. Soit g un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ vérifiant $g \circ g = f$.
Si v est un vecteur propre de f, montrer que $g(v)$ est également un vecteur propre de f

$\surd$ *Supposons $f(v) = \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors*

$$f(g(v)) = (g \circ g)(g(v)) = g(g(g(v))) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v),$$

donc $g(v)$ est valeur propre d f avec la même valeur propre λ.

c. Montrer que v est un vecteur propre de g.
Quelle relation existe-t-il entre sa valeur propre pour f et celle pour g ?

$\surd$ *Les trois espaces propres de f, pour $\lambda = 0, 1, 9$, sont chacun de dimension 1, donc si $g(v)$ est un vecteur propre de f pour la même vecteur propre λ, c'est que $g(v)$ est un multiple scalaire de v, disons $g(v) = \mu v$. Alors v est vecteur propre de g pour la valeur propre μ. Or $f(v) = g(g(v)) = g(\mu v) = \mu g(v) = \mu^2(v)$, donc on a la relation $\lambda = \mu^2$ entre la valeur propre λ pour f et la valeur propre μ pour g.*

d. En déduire qu'il existe exactement quatre matrices X telles que $X^2 = A$ (il n'est pas demandé de les expliciter).

$\surd$ *L'endomorphisme g de matrice X doit vérifier $g \circ g = f$, donc la question précédente s'applique. Comme les vecteurs propres pour f le sont aussi pour g, la matrice X exprimée sur la base (v_1, v_2, v_3) de vecteurs propres est diagonales, avec comme coefficients diagonaux μ_1, μ_2, μ_3 les valeurs propres pour g qui vérifient donc $\mu_1^2 = 0$, $\mu_1^2 = 1$ et $\mu_3^2 = 9$. On a pour chacune les possibilités suivantes : $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \pm 1$ et $\mu_3 = \pm 3$; au total cela permet 4 possibilités distinctes.*

4. On veut résoudre en trois fonctions réelles $x(t), y(t), z(t)$ le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x'(t) = & 7\ x(t) + 2\ y(t) - 2\ z(t) \\ y'(t) = & -\ x(t) + 2\ y(t) \\ z'(t) = & 11\ x(t) + 5\ y(t) - 3\ z(t) \end{cases}$$

a. Écrire ce système sous forme matricielle $V'(t) = M \cdot V(t)$.

$\surd$ *On peut l'écrire* $V'(t) = M \cdot V(t)$ *avec*

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 11 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

b. Montrer que la matrice M est diagonalisable.

$\surd$

$$\chi_M = \begin{vmatrix} X-7 & -2 & 2 \\ 1 & X-2 & 0 \\ -11 & -5 & X+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-7 & 0 & 2 \\ 1 & X-2 & 0 \\ -11 & X-2 & X+3 \end{vmatrix} = (X-2)(X^2-4X+3)$$

qui est un polynôme $(X-2)(X-3)(X-1)$ *scindé à racines simples, donc* M *est diagonalisable.*

c. Préciser une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$M = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

Sans calculer le déterminant de P, justifier l'inversibilité de la matrice P.

$\surd$ *Les colonnes de* P *doivent être des vecteurs propres de* M*, et pour les valeurs propres* $\lambda = 1, 2, 3$ *de* M *on trouve respectivement des vecteurs propres* $(1, 1, 4)$, $(0, 1, 1)$, *et* $(1, -1, 1)$. *Les coefficients diagonaux de* D *sont les valeurs propres associés à ces vecteurs, donc*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Comme des vecteurs propres pour des valeurs propres distincts sont toujours indépendants, les colonnes de P *forment une base de* $\mathbf{R}^3$ *et* P *est inversible.*

d. Montrer que les triplets solutions de $V'(t) = M \cdot V(t)$ s'écrivent

$$V(t) = \lambda_1 e^t V_1 + \lambda_2 e^{2t} V_2 + \lambda_3 e^{3t} V_3$$

où $V_1, V_2, V_3 \in \mathbf{R}^3$ sont des vecteurs que l'on précisera.

$\surd$ *Sur la base de vecteurs propres* $V_1 = (1, 1, 4)$, $V_2 = (0, 1, 1)$ *et* $V_3 = (1, -1, 1)$ *on peut écrire* $V(t) = f(1)V_1 + f(2)V_2 + f(3)V_3$, *où le système pour les nouvelles fonctions inconnues* f_1, f_2, f_3 *devient* $f_1'(t) = f_1(t)$, $f_2(t) = 2f_2(t)$, *et* $f_3(t) = 3f_3(t)$. *Ce système étant séparé, les solutions sont données par* $f_1(t) = \lambda_1 e^t$, $f_2(t) = \lambda_2 e^{2t}$ *et* $f_3(t) = \lambda_3 e^{3t}$ *pour trois constantes indépendantes* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, *ce qui donne la description donnée de la solution générale du système.*

Fin.