Corrigé du contrôle du 25 mars 2003

Exercice 1 – On a $\lim \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$. La règle de d'Alembert prouve que le rayon de convergence de cette série entière est 1.
– Pour la seconde série entière on peut utiliser la règle de Cauchy combinée avec un développement limité.

$$\begin{aligned}
\left[\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}\right]^{\frac{1}{n}} &= \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}\\
&= \big(1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3})\big)^{n^2}\\
&= \exp\left(n^2\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3})\right)\right)\\
&= \exp\left(n^2\Big(-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^3})\Big)\right)\\
&= e^{-\frac{1}{2}+o(\frac{1}{n})}
\end{aligned}$$

La limite de l'expression est donc $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Le rayon de convergence de la série entière est $\sqrt{e}$.

Exercice 2 – a) Si la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation, on a (pour x inférieur au rayon de convergence de la série)

$$4x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(4n(n-1)a_n + 2na_n + a_{n-1}\Big)x^{n-1} = 0$$

D'où la relation de récurrence entre les coefficients :

$$\forall n > 1 \qquad a_n(4n^2-2n) + a_{n-1} = 0$$

puis

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{2n(2n-1)}$$

b) D'après a) on obtient :

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{2n(2n-1)} = \frac{a_{n-2}}{2n(2n-1)(2(n-1))(2(n-1)-1)} = \frac{a_{n-2}}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}$$

ce qui suggère que $a_n = \dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$, ce que l'on vérifie immédiatement par récurrence. Le rayon de convergence de la série ainsi obtenue est infini (appliquer la règle de d'Alembert). La somme

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{(2n)!}$$

est donc solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $a_0 \in \mathbb{R}$.

c) On connaît le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \cos x$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

On constate donc que pour $x > 0$ la solution de l'équation différentielle trouvée en b) n'est autre que $y(x) = \cos \sqrt{x}$.

Exercice 3 – a) Le vecteur $V_1 = (1, 0, -3)$ est orthogonal au plan P_1 (car si $V = (x, y, z) \in P_1$, le produit scalaire de V et V_1 est nul),

b) De même, le vecteur $V_2 = (0, 1, -2)$ est orthogonal au plan P_2. Le vecteur $V = (x, y, z)$ appartient à la droite $D = P_1 \cap P_2$ si et seulement si $x = 3z$ et $y = 2z$. Donc, en choisissant $z = 1$ on obtient un vecteur directeur $W = (3, 2, 1)$ de cette droite D. Le plan P orthogonal à D a donc pour équation $3x + 2y + z = 0$.

c) Comme le plan P est orthogonal au vecteur $V = (3, 2, 1)$, il contient V_1 et V_2. On peut choisir les 2 premiers vecteurs de la base : V et $V_1 = (1, 0, -3) \in P_1$ (et normés !). Le troisième vecteur (dans P donc déjà orthogonal à V) est de la forme $Y = \lambda V_1 + V_2$ (que l'on devra normer). On détermine λ par exemple en utilisant

$$V_1.(\lambda V_1 + V_2) = 0$$

soit $\lambda = -\dfrac{V_1.V_2}{\|V_1\|^2} = -\dfrac{6}{10}$ et $Y = (-\dfrac{3}{5}, 1, -\dfrac{1}{5})$. En normant ces 3 vecteurs on obtient une base orthonormée ayant les propriétés demandées (non unique) :

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 0, -3) \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}(-3, 5, -1) \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, 2, 1)$$

Exercice 4 a) Calcul des coefficients de Fourier de f :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2}$$

et si $n \neq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n} \right] = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{2}{\pi n} \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

b) La fonction f étant de classe C^1 par morceaux, elle vérifie les hypothèses du théorème de DIRICHLET. Sa série de Fourier converge en tout point et en particulier sa somme est $f(x)$ si f est continue en x. La série de Fourier s'écrit donc, compte tenu de a)

$$s(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin\big((2k+1)x\big)$$

On a donc en $x = \frac{\pi}{2}$, puisque $\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi}(-1)^k = 1$$

d'où après simplifications

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} = \frac{\pi}{4}$$

En appliquant maintenant l'égalité de Parseval, on obtient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}(-1)^k\right)^2$$

soit

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{((2k+1)\pi)^2}$$

et finalement

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$