FORMES DES GROUPES CLASSIQUES

P. Broussous

Mai 2000

I. ALGÈBRES À DIVISION SUR UN CORPS p-ADIQUE THÉORIE DE BRAUER

L'objet de cet exposé est de donner la classification des corps gauches (ou algèbres à division) sur un corps F complet pour une valuation discrète et à corps résiduel fini[1], ainsi que les théorèmes de structure pour les algèbres centrales simples sur F. Il est hors de question ici de donner toutes les démonstrations (ne serait-ce que par manque de temps).

Cette théorie (valable pour un corps de base quelconque, mais avec des résultats différents suivant le corps de base) s'appelle la *théorie du groupe de Brauer* et est exposée dans bon nombre d'ouvrages de référence :

I. Reiner, *Maximal Orders*, Academic Press, LMS.
W. Shaurlau, *Quadratic and hermitian forms*, chap. 8. Grund. der Wiss. 270, Springer.
A. Weil, *Basic Number Theory*, Classics in Mathematics, Springer. Ce livre a une approche analytique: il s'intéresse uniquement a des corps de base du type corps globaux (corps de nombres ou corps de fonctions sur un corps finis), ou à leurs complétés en une place. Le chapitre 1. donne le théorème de structure pour les corps localements compacts non-discrets (commutatifs ou non).

1. Notations. Ici F est un corps complet pour une valuation discrète et à corps résiduel fini. Un tel corps est localement compact et on peut montrer (Weil, chap. I) que c'est soit une extension finie d'une $\mathbb{Q}_p$ (muni de l'extension de la valuation de $\mathbb{Q}_p$), soit un corps $\mathbb{F}_q((T))$ de séries de Laurent sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ (muni de la valuation des séries).

On note $\mathfrak{o}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$, $k_F = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ le corps résiduel et v_F la valuation normalisée de F ($v_F(F^\times) = \mathbb{Z}$).

On utilisera des notations similaires lorsque d'autres corps entrerons en jeu.

2. Structure des corps gauches de centre F et de dimension finie sur F. (Weil Chap. I.)

Commençons par de la terminologie. Soit A une F-algèbre (que l'on supposera de dimension finie et muni d'une unité pour la multiplication , comme toutes les algèbres qui apparaîtrons dans cet exposé). On dit que :

A est centrale si son centre se réduit à $F.1_A$;

[1] J'utiliserai parfois le terme corps p-adique pour désigner de tels corps F.

A est simple si elle ne possède pas d'idéaux bilatères non triviaux (i.e. différents de 0 et A);
A est centrale-simple si elle est centrale et simple;
A est à division si tout élément non-nul de A est inversible (dans ce cas A est simple); on dit aussi que A est un *corps gauche.*

Soit D une algèbre à division centrale sur F. Alors on montre (Weil, Chap.I) que D possède une sous-$\mathfrak{o}_F$-algèbre compacte maximale $\mathfrak{o}_D$. Cette algèbre est un anneau local non commutatif, dont on note $\mathfrak{p}_D$ l'idéal maximal. Si π_D est une uniformisante de $\mathfrak{o}_D$ ($\mathfrak{p}_D = \pi_D\mathfrak{o}_D = \mathfrak{o}_D\pi_D$), alors $D = \mathfrak{o}_D(\pi)$ (D est le "*corps des fractions de* $\mathfrak{o}_D$").

Soit L/F une extension non-ramifiée maximale de F dans D ($\mathfrak{p}_F\mathfrak{o}_L = \mathfrak{p}_L$). Alors $d := [L : F] = [D : F]^{1/2}$ et il existe une uniformisante π_D de $\mathfrak{o}_D$ qui normalise L et telle que :
i) π_D^d est une uniformisante de $\mathfrak{o}_F$;
ii) $\mathfrak{o}_D = \mathfrak{o}_L[\pi_D] = \oplus_{k=0}^{d-1}\mathfrak{o}_L\pi_D^k$;
iii) l'application $\sigma : l \mapsto \pi_D^{-1} l \pi_D$ est un générateur de $\mathrm{Gal}(L/F)$.

On a ainsi une présentation de D par générateurs et relations.

Rappelons qu'une extension non-ramifiée L/F est cyclique et que son groupe a un générateur privilégié Frob_F, appelé le *Frobenius*, qui est uniquement déterminé par la condition :

$$\mathrm{Frob}_F(u) \equiv u^q \bmod \mathfrak{p}_L \ , \ u \in \mathfrak{o}_L.$$

Ecrivons $\sigma = \mathrm{Frob}_F^r$, avec $r \in \mathbb{Z}$. Alors $(r, d) = 1$ car σ engendre $Gal(L/F)$. On peut montrer que la classe de r/d dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ne dépend pas du choix de L et π_D. Cette classe s'appelle *l'invariant de Hasse* de D et se note $\mathrm{inv}_F(D)$. On montre que $\mathrm{inv}_F(D)$ détermine entièrement l'algèbre à division centrale D à isomorphismes de F-algèbres près (cela devrait être à peu près clair pour ceux qui connaissent la théorie des algèbres cycliques).

3. Le théorème de Wedderburn.

On suppose momentanément que F est quelconque. Soit A une F-algèbre. L'algèbre opposée A° est l'algèbre déduite de A en gardant la même structure de F-espace vectoriel, mais en utilisant le produit $\circ$ défini par $a \circ b = ba$.

Observons que A est naturellement un A-module à gauche et un A°-module à droite. D'où un morphisme d'algèbres canonique :

$$A \otimes_F A^\circ \longrightarrow End_F(A) \ , \ a \otimes b \mapsto \varphi_{a\otimes b},$$

où $\varphi_{a\otimes b}(u) = aub$, $u \in A$.

Si E/F est une extension de corps, on note A_E la E-algèbre $A \otimes_F E$. On a alors :

THÉORÈME. (Wedderburn). *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) A est centrale-simple.

(2) L'application canonique $A \otimes_F A^\circ \longrightarrow End_F(A)$ est un isomorphisme.
(3) Il existe une extension de corps E/F et un isomorphisme $A_E \simeq M(m,E)$ pour un certain m.
(4) Si $\bar{F}$ est une clôture algébrique de F, alors $A_{\bar{F}} \simeq M(m,\bar{F})$ pour un certain m.
(5) Il existe une algèbre à division centrale D et un entier r tels que $A \simeq M(r,D)$.

De plus si A est centrale simple, l'entier r de (5) est la classe d'isomorphie de D sont entièrement déterminés par A.

Un algèbre simple de la forme $M(r,F)$ sera dite **déployée**.

Supposons à nouveau que F est un corps local. Alors on peut être plus précis sur le point (3) du théorème. Ecrivons $A \simeq M(r,D)$ comme en (5). On sait que $[D:F]$ est un carré d^2. Alors toute extension de corps E/F de degré multiple de d *déploie* A, c'est à dire que l'on a $A_E \simeq M(rd,E)$. En particulier une extension de corps non-ramifiée de degré d déploie A.

4. Trace et norme réduite. (Cf. Reiner, Weil, Bourbaki,...)

Ici on suppose à nouveau F quelconque. On peut définir pour les algèbres centrales simples des objets similaires à la trace et au déterminant. Soit A une F-algèbre centrale simple et E/F une extension séparable qui déploie A. Soit a dans A. Notons $a \otimes 1$ l'élément de $A \otimes_F E$ correspondant. Alors la trace et le déterminant de $a \otimes 1$ sont dans F et ne dépendent pas du choix de E. On les notes $Trd(a)$ et $Nrd(a)$ (traces et normes réduites). Si on fixe une base quelconque de A sur F, se sont des fonctions polynômiales en les coordonnées de a. Puisque a est inversible si et seulement si $a \otimes 1$ est inversible, on voit que $A^\times$ est constitué des éléments de norme réduite non-nulle.

Tout ceci permet (il faut un peu travailler ici) de voir $A^\times$ comme les points d'un groupe algébrique $\mathbb{G}$ défini sur F. On peut voir ça d'un point de vue un peu plus canonique. Si $\mathbb{H}$ est un groupe algébrique défini sur F, on peut lui associer le foncteur :

$$\{F\text{-algèbres commutatives de type fini}\} \longrightarrow \{\text{groupes}\}$$
$$B \mapsto \mathbb{H}(B) = \text{ points de } \mathbb{H} \text{ dans } B$$

Un résultat classique de géométrie algébrique (Lemme de Yoneda) montre que $\mathbb{H}$, vu comme foncteur, détermine entièrement $\mathbb{H}$, vu comme groupe algébrique. Ici on peut décrire facilement notre groupe $\mathbb{G}$ vu comme foncteur : il associe à toute F-algèbre commutative B de type fini, le groupe $(A \otimes_F B)^\times$. En particulier $\mathbb{G}(E) = GL(m,E)$ pour toute extension E/F qui déploie A.

5. Le groupe de Brauer.

On montre que si A et B sont centrales simples, il en est de même de $A \otimes_F B$. On dit que deux algèbres centrales simples A et B sont *similaires* si les algèbres D intervenant dans le théorème de structure de Wedderburn sont isomorphes (on oublie l'entier r). Par exemple toute algèbre déployée est similaire à $M(1, F) = F$. On note $[A]$ la classe de A pour la relation d'équivalence donnée par la similitude, et on note $Br(F)$ l'ensemble de ces classes. On munit $Br(F)$ d'une structure de groupe par $[A].[B] = [A \otimes_F B]$ (on montre que ça ne dépend pas des représentants). C'est effectivement un groupe :

(i) l'associativité vient de l'associativité du produit tensoriel;
(ii) L'élément neutre est $[F]$;
(iii) L'opposé de $[A]$ est $[A^\circ]$ (cf. point (2) du théorème de Wedderburn).

De plus ce groupe est commutatif, puisque le produit tensoriel l'est (à isomorphisme près); on l'appelle *le groupe de Brauer* de F.

THÉORÈME. *Supposons F localement compact, non-archimédien et à corps résiduel fini. Alors $Br(F)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. L'isomorphisme est effectivement donné de la façon suivante : si A s'écrit $M(m, D)$, on associe à $[A]$ l'invariant de Hasse $inv_F(D) = r/d \bmod \mathbb{Z}$ (avec les notations du 2.). On notera $inv_F[A] = inv_F(D)$.*

Si E/F est une extension finie, on a un morphisme de groupes $\varphi_{E/F}$: $Br(F) \longrightarrow Br(E)$, donné par $[A] \mapsto [A \otimes_F E]$. En fait on sait décrire explicitement ce morphisme du côté de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$: on a pour toute algèbre centrale simple A sur F

$$inv_E(\varphi_{E/F}([A])) = inv_F([A])[E : F].$$

Le dernier théorème couplé avec ce résultat permet de faire des calculs explicites sur les algèbres.

Remarques 1. On montre (théorème de Frobenius) que le groupe de Brauer d'un corps fini est trivial : il n'y a pas d'algèbres à division non-triviales sur un corps fini.

2. On montre que $Br(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, l'élément non-trivial du groupe étant la classe de l'algèbre des quaternions de Hamilton.

6. Le théorème de Skolem-Noether.

Soit A une algèbre centrale-simple sur F (quelconque).

THÉORÈME. *Soit $B \subset A$ une sous-algèbre simple. Alors tout homomorphisme de F-algèbres $\varphi : B \longrightarrow A$ est de la forme $\varphi(b) = ubu^{-1}$, $b \in B$, pour un u dans $A^\times$. En particulier tout automorphisme de la F-algèbre A est intérieur.*

7. Involutions sur les algèbres à division.

Soit F p-adique et D une algèbre à division centrale sur F. Pour la théorie des formes hermitiennes, on a besoin de considérer des involutions σ sur D, c'est à dire des isomorphismes d'anneaux $\sigma : D \longrightarrow D^\circ$ vérifiant $\sigma^2 = id$. Nous allons voir que de telles invoutions n'existent que si D est une algèbre de quaternions ou un corps commutatif.

Supposons σ de *première espèce* : dans tous les cas le centre F de D est fixe par σ, mais l'on suppose de plus que $\sigma_{|F} = id_F$ (sinon on dit que σ est de seconde espèce). Alors σ est un isomorphisme de F-algèbres entre D et D°. Ceci implique que $[D]^2 = 1$ dans le groupe de Brauer. Donc si l'invariant de Hasse est $r/d \bmod \mathbb{Z}$, avec $(r, d) = 1$, on a $2r \equiv 0 \bmod d$, d'où soit $d = 2$ et $r = 1$: D est l'unique algèbre de quaternions non-déployée, d'invariant de Hasse $1/2 \bmod \mathbb{Z}$, soit $d = 1$ et $D = F$.

(7.1) *Les seules algèbres à division munies d'une involution de première espèce sont les algèbres de quaternions ou les corps commutatifs.*

Soit à présent σ une involution de seconde espèce sur D: la restriction $\sigma_o = \sigma_{|F}$ n'est pas triviale. Notons $F_o = F^{\sigma_o}$ le corps des points fixes par σ_o. Puisque σ_o est d'ordre 2, l'extension F/F_o est galoisienne séparable.

Soit D_{σ_o} la F-algèbre déduite de D en tordant la multiplication externe par σ_o. Alors l'identité de D induit un isomorphisme d'anneaux, σ_o-linéaire entre D et D_{σ_o}. Par composition avec σ, on en déduit un isomorphisme d'anneaux F-linéaire $D \longrightarrow D^o_{\sigma_o}$. Cependant, grâce au théorème de structure donné en 2., on voit facilement que D et D_{σ_o} ont le même invariant de Hasse, donc appartiennent à la même classe du groupe de Brauer. On en déduit que, comme dans le cas de première espèce, que puisque $D \simeq D^o$ comme F-algèbres, D ne peut être que commutative ou de quaternions.

C'est un théorème non-trivial que le second cas ne peut se produire.

(7.2) *Soit D une F-algèbre à division sur un corps p-adique qui admette une involution de seconde espèce. Alors $D = F$ et l'involution correspond à l'élement non trivial de $Gal(F/F_o)$ pour une extension quadratique séparable F/F_o.*

La démonstration se trouve dans [Sharlau] Thm 2.2 p. 353. Ce résultat est encore vrai sur un corps de nombres (cf. Platonov-Rapinchuk p. 91.).

II. Groupes classiques et Groupes de types A,B,C,D

Il existe naturellement deux types de groupes algébriques simples remarquables dans la nature. En suivant une terminologie non standard, les premiers, *dits groupes classiques* sont le groupe spécial linéaire sur une algèbre à division, ainsi que les groupes de transformations laissant invariante une forme ϵ-hermitienne sur une algèbre à division avec involution; les seconds *dits de types A, B, C ou D*, sont ceux qui, sur la clôture séparable du corps de base, ont un système de racines du type A_n, B_n, C_n ou D_n. Le résultat que nous voulons décrire est le suivant :

Les groupes de classiques sont de type A, B, C ou D, et la réciproque est vraie sauf pour certains groupes de type D_4.

Ce théorème est du à André Weil (*Algebras with involutions and the classical groups*, J. Indian Math. Soc. **24** (1961), 589-623, cf. aussi *Oeuvres*

Complètes). Le sens direct est facile. Pour la réciproque, l'astuce de Weil est de remarquer que sur la clôture algébrique (l'article est écrit en caractéristique 0), certains groupes de types A, B, C ou D sont naturellement associés à des algèbres simples avec involutions. Les groupes formes de ces groupes sont aussi associées à des algèbres simples avec involutions tordues avec des cocycles. Mais ces derniers objets se trouvent être des algèbres simples avec involutions... Il suffit alors de montrer comment passer des algèbres simples avec involutions aux groupes classiques.

L'article un peu rapide de Weil a été repris (par ordre chronologique) par Kneser (*Lecture on Galois Cohomology of Classical Groups*, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1969), Platonov-Rapinchuk (*Algebraic groups and number theory*, Ac. Press, 1994) et dans *The book of involutions*, AMS Coll. Pub., vol 44 1998. Kneser n'est pas disponible, le traitement de *The book of involutions* est assez compliqué et je suivrai donc Platonov-Rapinchuk 2.3, pp. 78-92.

1. Notations. On notera K le corps de base. On suppose que l'on n'est pas en caractéristique 2. Le cas qui nous intéresse est celui d'un corps local (voire d'un corps de nombre) et certaines choses se simplifient alors. Cependant la plupart des démonstrations sont valides sans cette hypothèse. On note $\bar{K}$ une clôture séparable de K et Γ le groupe de Galois $Gal(\bar{K}/K)$.

2. Les séries A, B, C et D.

Dans cette section, nous introduisons une série de groupes semisimples, définis sur K et qui sont de type A, B, C ou D. Les autres groupes de types A, B, C, D seront donc isogènes sur $\bar{K}$ à l'un des groupes de la série. Pour simplifier on ne considérera que ceux-ci et nous laissons les problèmes d'isogénie de côté. Le problème est donc ramené à trouver les K-formes des groupes que nous introduisons.

2.1 Le groupe spécial linéaire.

Soit D une algèbre à division sur K, de dimension d^2 sur K. Soit n un entier $\geqslant 1$. Comme nous l'avons vu dans le précédent exposé, on peut voir $GL(n,D)$ comme les points d'un groupe algébrique défini sur K, que l'on notera de la même façon, et dont les points dans une K-algèbre affine B sont donnés par $GL(m,D)(B) = (M(n,D) \otimes_K B)^\times$.

Soit $SL(m,D)$ les éléments de $GL(m,D)$ de norme réduite 1. Il est clair que ce groupe peut être vu comme le groupe des K-points d'un groupe algébrique défini sur K, que l'on notera de la même façon. Ses points sur une extension L/K de K sont donnés par $\{x \in (M(n,D) \otimes_K L)^\times \ ; Nrd(x) = 1\}$. Par les propriétés de déploiement des algèbres centrales-simples et par définition même de Nrd, il est clair que $SL(n,D)$ est isomorphe à $SL(md,K)$ sur $\bar{K}$.

On a donc :

Le K-groupe algébrique $SL(n,D)$ est de type A_{nd-1} et il est simplement connexe.

On peut montrer que le K-rang de $SL(n,D)$ est $n-1$ (c'est à dire la dimension d'un tore déployé maximal). Comme exercice, nous allons démontrer le fait marquant suivant :

Le groupe $SL(1,D)$ est anisotrope.

Démonstration. Soit T un K-tore déployé de $SL(1,D)$. Faisons agir T sur D par conjugaison. On sait que cette action est diagonalisable. Soit $x \in D$ un vecteur propre pour un caractère χ de T intervenant dans cette représentation : $txt^{-1} = \chi(t)x$. En prenant la norme réduite, on obtient : $Nrd(x) = [\chi(t)]^d Nrd(x)$, d'où $[\chi(t)]^d = 1$ pour tout t. Ceci entraîne que χ est trivial. L'action de T par conjugaison étant triviale, on a que T est contenu dans le centre de $SL(1,D)$ qui est fini ($\simeq \mu_q(K)$). T est donc trivial. CQFD.

2.2 Les groupes orthogonaux et symplectiques.

Soit f une forme bilinéaire non-dégénérée sur un K-espace vectoriel V de dimension n. Si f est alternée, on sait que $n = 2m$. Le groupe des transformations linéaires de V qui préserve f forment le groupe symplectique $Sp_{2m}(f)$. On sait que l'on peut trouver une base dans laquelle la matrice F de f s'écrit par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & O \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

On peut donc identifier $Sp_{2m}(f)$ à

$$Sp_{2m}(F) = \{g \in GL_{2m}(K) \ ; \ {}^t gFg = F\},$$

et $Sp_{2m}(F)$ apparaît naturellement comme les points d'un groupe algébrique. Ce groupe est toujours simple et toujours K-déployé : il existe un K-tore maximal et déployé, on peut prendre

$$T = \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, \dots, t_n, t_1^{-1}, t_2^{-1}, \dots, t_n^{-1}) \ ; \ t_i \in K^\times\}.$$

Plus précisément, on a :

$Sp_{2m}(F)$ est un K-groupe algébrique simple, simplement connexe, déployé, de K-rang (donc de $\bar{K}$-rang) m. Il est du type C_m.

Supposons à présent f symétrique . Le groupe $SO_n(f)$ est le groupe des transformations linéaires de V, de déterminant 1, qui préservent la forme f. Comme précédemment on peut le voir comme les points d'un groupe algébrique défini sur K en faisant intervenir la matrice de f dans une base.

Si on considère la forme obtenue sur $V \otimes_K \bar{K}$ par extension des scalaires, deux cas peuvent se produire.

Cas no 1. L'entier n est pair : $n = 2m$. Alors il existe une base dans laquelle la matrice F de f peut s'écrire par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & O \end{pmatrix}$$

Donc les groupes $SO_{2m}(f)$ sont tous isomorphes sur $\bar{K}$. Un $\bar{K}$-tore maximal déployé est donné par la même formule que pour le groupe symplectique. On peut montrer que si $SO_2(f)$ est isomorphe à $\mathbb{G}_m$ sur $\bar{K}$, que SO_4 est isogène à $SL_2 \times SL_2$ sur $\bar{K}$. Cependant pour $m \geqslant 3$, on a :

$SO_{2m}(f)$ est un groupe simple de type C_m. Il n'est pas simplement connexe (son revêtement universel est le groupe $Spin_m$).

De plus on peut montrer que le K-rang de $SO_{2m}(f)$ est égal à l'indice de Witt de f, c'est à dire à la dimension d'un sous-espace totallement isotrope maximal.

Cas no 2. L'entier n est impair : $n = 2m + 1$. Alors il existe une base dans laquelle la matrice F de f peut s'écrire par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & & I_m & 0 \\ & & & \vdots \\ I_m & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc les groupes $SO_{2m+1}(f)$ sont tous isomorphes sur $\bar{K}$. Un $\bar{K}$-tore maximal déployé est donné par

$$T = \{\mathrm{diag}(t_1, t_2, \dots, t_n, t_1^{-1}, t_2^{-1}, \dots, t_n^{-1}, 1) \ ; \ t_i \in \bar{K}^\times\}.$$

On a :

Les groupes $SO_{2m+1}(f)$, $\mu \geqslant 1$, sont simples, de type B_m. Ils ne sont pas simplement connexes. Leur K-rang est l'indice de Witt de la forme f sur K.

3. Involutions sur les algèbres simples.

Soit A une K-algèbre. Une involution σ sur A est un isomorphisme d'algèbres $A \longrightarrow A^o$, tel que $\sigma \circ \sigma = id_A$. On suppose que A est simple (mais pas forcément centrale). Le centre L de A est une extension de K stabilisée par σ. On suppose que $L^\sigma = K$. Des paires (A, σ) vérifiant les hypothèses précédentes seront appelées des *K-algèbres simples à involution.* On dit que l'involution est *de première espèce* si $K = L$, et *de seconde espèce* sinon. Dans le second cas l'extension L/K est quadratique séparable.

(3.1) LEMME. *Soient τ et σ deux involutions sur une K-algèbre simple A qui coïncident sur le centre L de A. Alors, on peut trouver un g dans $A^\times$ tel que*

$$\sigma(x) = g\tau(x)g^{-1} \;,\; x \in A, \tag{3.2}$$

et vérifiant de plus $\tau(g) = \pm g$ si τ est de première espèce et $\tau(g) = g$ si τ est de seconde espèce. Réciproquement, si (A, τ) est une K-algèbre simple à involution, et si g est comme précédemment, alors l'application σ donnée par (3.2) est une involution de A.

Démonstration. Posons $\varphi = \sigma\tau^{-1}$. C'est un automorphisme de A qui préserve le centre, donc L-linéaire. Par Skolem-Noether, il existe $g \in A^\times$, tel que $\varphi = Int(g)$. Donc $\sigma(x) = g\tau(x)g^{-1}$, $x \in A$. En écrivant que $\sigma^2 = id_A$, on obtient $g\tau(g)^{-1} \in L$, i.e. $\tau(g) = \lambda g$ pour un élément du centre λ. Si τ est de première espèce, en écrivant que $\tau^2 = id_A$, on a immédiatement $\lambda^2 = 1$, d'où $l = \pm 1$.

Si τ est de seconde espèce, on a $N_{L/K}(g\tau(g)^{-1}) = g\tau(g)^{-1}\tau(g\tau(g)^{-1}) = 1$. Par Hibert 90, on peut trouver un a dans L tel que $g\tau(g)^{-1} = a\tau(a)^{-1}$. Puisque a est central, on peut toujours remplacer g par ga^{-1} et on obtient $\tau(g) = g$.

La réciproque est immédiate.

Si (A, τ) est une K-algèbre (pas forcément simple) munie d'une involution, on notera $(A \otimes_K \bar{K}, \tau)$ la $\bar{K}$-algèbre muni de l'involution τ prolongée par $\bar{K}$-linéarité. On dit que deux paires (A, τ), (B, σ) sont $\bar{K}$-isomorphes s'il existe un isomorphisme de $\bar{K}$-algèbres $\varphi : A \otimes_K \bar{K} \longrightarrow B \otimes_K \bar{K}$, tel que $\tau = \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$.

Considérons les trois algèbres suivantes (pas forcément simples) munies d'involutions :

(1) $A = M_n(K)$, $\tau(x) = {}^t x$;
(2) $A = M_n(K)$, $\tau(x) = J^t x J^{-1}$, où J est la matrice standard (2.2) d'une forme symplectique.
(3) $A = M_n(K) \oplus M_n(K)$, $\tau(x, y) = ({}^t y, {}^t x)$.

(3.3) LEMME. *Soit (A, τ) une K-algèbre simple à involution. Alors elle est $\bar{K}$-isomorphe à l'algèbre (1) ou l'algèbre (2), si τ est de première espèce, et à l'algèbre (3) si τ est de seconde espèce.*

Terminologie. Si τ est de première espèce, on dira que (A, τ) est du *premier type* si elle est $\bar{K}$-isomorphe à une algèbre du type (1) et du *second type* sinon.

Démonstration. Supposons d'abord τ de première espèce. Alors K est le centre de A et on a un isomorphisme $\varphi : A \otimes_K \bar{K} = M_n(\bar{K})$. Soit $\nu = \varphi\tau\varphi^{-1}$ l'involution obtenue sur $M_n(\bar{K})$. D'après la Lemme (3.1), elle s'écrit $\nu(x) = F^t x F^{-1}$, où ${}^t F = \pm F$. On sait alors que F est soit congruente à I_n, soit à la matrice J de (2). Il existe donc une matrice inversible B telle que $F = B^t B$ ou $F = BJ^t B$. L'application $\psi = Int_B \circ \varphi$ réalise donc un $\bar{K}$-isomorphisme d'algèbres à involution entre (A, τ) et l'algèbre du type (1) ou du type (2).

Si τ est de seconde espèce, la preuve est similaire en remarquant que $A \otimes_K \bar{K} = A \otimes_L (L \otimes_K L) \otimes_L \bar{K} = M_n(\bar{K}) \oplus M_n(\bar{K})$, car $L \otimes_K L \simeq L \oplus L$.

4. Groupes classiques et algèbres à involutions.

Dans ce paragraphe, nous intruisons les groupes classiques et montrons quel est leur lien avec les algèbres à involution.

On se donne une K-algèbre simple à division et à involution (D, τ). Soit $m \geqslant 1$, on note $V = D^m$, que l'on considère comme une D-espace vectoriel *à droite*, de sorte que via la base cononique $End_D V$ s'identifie naturellement à l'algèbre $M(m, D)$. Soit $\epsilon = \pm 1$. On se donne f une forme ϵ-hermitienne non-dégénérée sur V. Elle vérifie donc :

- $f(u, vd_1 + wd_2) = f(u, v)d_1 + f(u, w)d_2$,
- $f(vd_1 + wd_2, u) = \tau(d_1)f(v, u) + \tau(d_2)f(w, u)$,
- $f(u, v) = \epsilon\tau(f(v, u))$,
- *l'orthogonal de V est* 0.

Exemple. Prenons $\epsilon = 1$ et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments non-nuls de D invariants par τ. Alors la forme $f(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \tau(x_i) a_i y_i$ (écriture dans la base canonique) est hermitienne non dégénérée.

Le groupe unitaire $U_m(D, f)$ est le groupe des transformations linéaires de V préservant f. Le groupe spécial-unitaire $SU_m(D, f)$ est le sous-groupe formé des éléments de norme réduite 1.

Si $F = (f_{i,j})_{i,j} \in M(m, D)$, on note ${}^*F$ la matrice ayant pour entrées $[\tau(f_{j,i})]_{i,j}$. Notons que $*$ est une involution de $A = M(m, D)$. Si $F = [f(e_i, e_j)]_{i,j}$ est la matrice de f dans la base canonique, alors ${}^*F = \pm F$ et on a :

$$U_m(f, D) = \{g \in GL(m, D) \ ; \ {}^*gFg = F\};$$

$$SU_m(f, D) = \{g \in SL(m, D) \ ; \ {}^*gFg = F\}.$$

On définit une autre involution sur la K-algèbre simple $A = M(m, D)$ par $\sigma(x) = F^{-1}.^*x.F$. On peut alors présenter nos groupes unitaires sous la forme :

$$U_m(f, D) = \{g \in GL(m, D) \ ; \ \sigma(g)g = I_m\};$$

$$SU_m(f, D) = \{g \in SL(m, D) \ ; \ \sigma(g)g = I_m\}.$$

On peut vérifier qu'on définit ainsi des K-fermés de Zariski. On peut donc voir $U_m(f, D)$ et $SU_m(f, D)$ comme les points de K-groupes algébriques que l'on continue de noter de la même façon.

Notons $n^2 = [D : K]$. Supposons d'abord τ de première espèce. Alors

$$U_m(f, D)(\bar{K}) = \{g \in GL(mn, \bar{K}) \ ; \ \nu(g)g = I_{mn}\};$$

$$U_m(f, D)(\bar{K}) = \{g \in SL(mn, \bar{K}) \ ; \ \nu(g)g = I_{mn}\},$$

où ν est l'involution sur $A \otimes_K \bar{K}$ étendue par $\bar{K}$-linéarité. Je n'ai pas vérifié ça (Platonov-Rapinchuk non plus), mais on peut montrer :

(4.1) Proposition. *L'involution ν est du même type que τ si $\epsilon = 1$ et du type opposé sinon. Donc, notant G le K-groupe algébrique $SU_m(D, f)$, on a :*

Si τ est une involution de première espece, du second type et f hermitienne, ou si τ est une involution de première espèce, du second type, et f antihermitienne, alors $G \simeq Sp_{mn}$ sur $\bar{K}$ et G est du type $C_{mn/2}$.
Si τ est une involution de première espèce du premier type et f hermitienne, ou si τ est du second type et f antihermitienne, alors, $G \simeq SO_{mn}$ sur $\bar{K}$ et G est du type $B_{(mn-1)/2}$ ou $D_{mn/2}$.

Si τ est de seconde espèce, on montre que l'on peut trouver un isomorphisme $A \otimes_K \bar{K} \simeq M_{mn}(\bar{K}) \oplus M_{mn}(\bar{K})$, de sorte que σ s'étende en une involution ν du type (3) de **3**. On a alors:
$U_m(f, D)(\bar{K}) = \{(X, Y) \in GL_{mn}(\bar{K}) \times GL_{mn}(\bar{K}) \ ; \ (X, Y)({}^tY, {}^tX) = (I_{mn}, I_{mn})\}$,
$SU_m(f, D)(\bar{K}) = \{(X, Y) \in SL_{mn}(\bar{K}) \times SL_{mn}(\bar{K}) \ ; \ (X, Y)({}^tY, {}^tX) = (I_{mn}, I_{mn})\}$.
Il est clair que l'application $(X, Y) \mapsto X$ induit un $\bar{K}$-isomorphisme $SU_m(f, D)(\bar{K}) \simeq SL_{mn}(\bar{K})$. On a donc :

(4.2) Proposition. *Si τ est de seconde espèce, alors $SU_m(f, D)$ est une forme de SL_{mn}; c'est donc un K-groupe simplement connexe de type A_{mn-1}.*

Remarques. 1) J'ai passé quelques démonstrations sous silence ici.
2) Si K est un corps local et τ de seconde espèce, alors D est commutative, de sorte que $SU_m(f, D)$ est un groupe unitaire associé à une extension quadratique séparable.

3) On peut montrer que dans la proposition (4.1), le seul cas ou on peut obtenir un groupe de type B est le cas $n = 1$, i.e. $D = K$.

L'objet du dernier exposé sera de démontrer la réciproque des propositions (4.1) et (4.2): les formes de SL_N, Sp_{2N}, SO_{2N+1}, SO_{2N} (avec ici $N \neq 4$), sont des groupes unitaires pour une forme sur une algèbre à division avec involution.

III. Les formes des groupes SL_N, Sp_{2N}, SO_{2N+1}, et SO_{2N} avec $N \neq 4$.

Notations. Ici K est le corps de base et tous les groupes algébriques que nous considérons sont définis sur K. On fixe une clôture séparable $\bar{K}$ de K. On suppose que la caractéristique de K n'est pas 2, sauf lorsque l'on s'intéressera aux formes *intérieures* de SL_N, où cette hypothèse n'est pas nécessaire.

0. Formes et cohomologie galoisienne.

Pour la cohomologie galoisienne, voir le LN de Serre du même nom, ou *Corps locaux* du même auteur.

Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique défini sur K. On dit qu'un autre groupe algébrique $\mathbb{H}$ est une *forme* de $\mathbb{G}$ s'il existe un isomorphisme de variétés $f : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{H}$ défini sur $\bar{K}$. Puisqu'un tel isomorphisme est donné par un nombre fini de fonctions polynomiales, en notant M le corps engendré par les coefficients de ces fonctions, on voit que f est en fait défini sur une extension finie de K. Quitte à remplacer M par sa clôture galoisienne dans $\bar{K}$, on peut se ramener au cas où M/K est galoisienne finie. On dira alors que $\mathbb{H}$ est une M/K-forme de $\mathbb{G}$. La recherche des formes de $\mathbb{G}$ est donc ramenée à la recherche des M/K-formes pour toute extension galoisienne finie M/K.

Soit $\mathbb{H}$ une M/K-forme de $\mathbb{G}$ et $f : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{H}$ un isomorphisme défini sur M. Notons $\Gamma = Gal(M/K)$. Pour chaque élément σ de Γ, on déduit de f un autre isomorphisme f^σ en tordant les coefficients des polynômes définissant f par σ. On obtient ainsi des M-automorphismes de $\mathbb{G}$ donnés par $c_\sigma = f^{-1} \circ f^\sigma$. On vérifie que l'on obtient un 1-cocycle de Γ dans $Aut_M(\mathbb{G})$, pour l'action naturelle de Galois (action sur les coefficients des polynômes). Cela signifie que la famille $(c_\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$ vérifie $c_{\sigma\tau} = c_\sigma \circ c_\tau^\sigma$. On dit qu'un 1-cocycle est *scindé* s'il est de la forme $c_\sigma = \Phi^{-1} \circ \Phi^\sigma$, pour un M-automorphisme Φ de $Aut_M(\mathbb{G})$. On dit que deux cocycles (c_σ) et (d_σ) sont *équivalents* s'il existe un élément Φ de $Aut_M(\mathbb{G})$ vérifiant $d_\sigma = \Phi^{-1} c_\sigma \Phi^\sigma$. L'ensemble des classes d'équivalences se notent $H^1(\Gamma, Aut_M(\mathbb{G}))$ et s'appelle le *premier ensemble de cohomologie (non-abélienne) de* Γ *dans* $Aut_M(\mathbb{G})$.

(0.1) Théorème. *L'application qui à une M/K-forme $\mathbb{H}$ de $\mathbb{G}$ associe la classe d'équivalence de (c_σ) dans $H^1(\Gamma, Aut_M(\mathbb{G}))$ est bien définie (ne dépend pas du choix de f) et induit une bijection entre les classes de K-isomorphie de M/K-formes de $\mathbb{G}$ et $H^1(\Gamma, Aut_M(\mathbb{G}))$.*

L'injectivité est facile et assez formelle. C'est la surjectivité qui est non triviale. L'idée de base est de partir de la M-algèbre affine $A = M[\mathbb{G}]$ et de tordre sa structure d'espace vectoriel via les c_σ (qui correspondent à des automorphismes de A). On obtient ainsi une M-algèbre affine B avec une action de Γ et la K-algèbre des points fixes sera la candidate pour être la K-algèbre affine d'une M/K-forme de $\mathbb{G}$.

D'un point de vue plus naïf. La donnée d'un cocycle (c_σ) permet de tordre l'action naturelle $g \mapsto g^\sigma$ de Γ sur $\mathbb{G}(M)$ en une nouvelle action : $g^{[\sigma]} = c_\sigma(g^\sigma)$. Si la classe de (c_σ) correspond à une forme $\mathbb{H}$, alors $\mathbb{H}(K)$ est l'ensemble des points fixes de $\mathbb{G}(M)$ pour l'action tordue de Γ.

On dit qu'une forme $\mathbb{H}$ est *intérieure* si les c_σ sont des automorphismes intérieurs de $\mathbb{G}(M)$.

Exemple. Soit D une algèbre de quaternions de centre un corps local K et soit M/K une extension quadratique non ramifiée. Alors D est une M/K-forme intérieure de $M(2,K)$. A l'élément non trivial σ du groupe de Galois on associe $c_\sigma = Ad(\Pi)$, où $\Pi \in M(2,M)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} O & \pi_K \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ , } \pi_K \text{ uniformisante de } K,$$

et à id_M, on associe l'automorphisme trivial. On vérifie qu'on a bien là un cocycle. C'est un bon exercice de vérifier, grâce au théorème de structure donné dans le premier exposé, que :

$$D \simeq \{x \in M(2,M) \; ; \; x = \Pi\sigma(x)\Pi^{-1}\}.$$

Par des arguments similaires, on montre que, pour tout algèbre à division centrale D, de degré d^2 sur K, $M(m,D)$ est une forme intérieure de $M(md,K)$, d'où il découle aisément que $SL(m,D)$ est une forme intérieure de $SL(md,K)$.

1. L'astuce de Weil.

1.1 Un résultat classique de cohomologie galoisienne.

Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie et M/K une extension galoisienne finie. Le choix d'une K-base de V le muni d'une structure de K-groupe algébrique. Le foncteur associé est :

$$B \text{ , } K\text{-algèbre affine } \mapsto V \otimes_K B.$$

On notera $V_M = V \otimes_K M$. Le résultat de base de la cohomologie galoisienne est que toutes les M/K-formes de V sont K-isomorphes. En fait cela vient du fait qu'un K-espace vectoriel est déterminé à K-isomorphismes près par sa dimension.

On a donc :

(1.1) COROLLAIRE *(de MIAS1 et du Théorème (0.1)). Le premier ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(\Gamma, Aut_M(V_M))$ se réduit à la classe des cocycles scindés.*

Remarque. Il y a des démonstrations simples de ces résultats qui évitent le Théorème (0.1) : cf. les bouquins de Serre cités plus haut, où l'article de Weil lui-même.

1.2 Les algèbres à involutions et cocycles.

Soit (A, τ) une K-algèbre simple à involution. On note V le K-espace vectoriel sous-jacent à A. Se donner une structure de K-algèbre sur V, revient à se donner une forme bilinéaire $V \otimes_K V \longrightarrow V$, ou encore un élément t de $T = V \otimes_K V \otimes_K V'$, vérifiant une liste de propriétés (ici V' désigne le K-dual de V). De même, se donner l'involution τ, revient à se donner une élément s de $S = V \otimes_K V'$ vérifiant une liste de propriétés.

Soit M/K une extension galoisienne finie. Considérons l'algèbre à involution (A_M, τ), où l'on a étendu τ par M-linéarité. Elle correspond à l'espace vectoriel V_M muni des tenseurs t de $T_M = V_M \otimes_M V_M \otimes_M V'_M$ et s de $S_M = V_M \otimes_M V'_M$ obtenus de s et t de façon canonique (prolongement par M-linéarité). L'action de Γ sur M se propage de façon canonique en des actions sur T_M et S_M de sorte que s et t soient Γ-invariants.

(1.2.1) THÉORÈME. (A. Weil) *Avec les hypothèses précédentes, soit (c_σ) un cocycle de Γ dans $Aut_K(V)$. Supposons que les tenseurs s et t soient invariants sous l'action de Galois tordue par (c_σ). Alors il existe une K-algèbre simple avec involution (A_1, τ_1) et un M-isomorphisme d'algèbres à involution $\Phi : (A_M, \tau) \longrightarrow (A_{1,M}, \tau_1)$ tel que $c_\sigma = \Phi^{-1} \circ \Phi^\sigma$.*

Démonstration. Le cocycle (c_σ) est scindé : il s'écrit $\Phi^{-1} \circ \Phi^\sigma$ pour un K-isomorphisme $\Phi : V_M \longrightarrow V_M$. Etendons Φ and des K-isomorphismes naturels $\Phi : S_M \longrightarrow S_M$, $T_M \longrightarrow T_M$. Considérons les tenseurs $t_1 = \Phi(t)$ et $s_1 = \Phi(s)$. Alors pour $\sigma \in \Gamma$, on a $t_1^\sigma = \sigma\Phi\sigma^{-1}t^\sigma = \Phi^s t^\sigma = \Phi c_\sigma t^\sigma = \Phi(t)$, puisque t est stable par l'action tordue de Galois. Il s'ensuit que $t_1 \in T$. De même le tenseur $s_1 = \Phi(s)$ est dans S. Ces tenseurs héritent des mêmes propriétés que s et t et il définissent donc une structure d'algèbre à involution (A_1, τ_1) sur V. Par construction Φ est un M-isomorphisme d'algèbres à involution de (A_M, τ) sur $(A_{1,M}, \tau_1)$

Noter que Φ n'est pas défini sur K en général.

2. À la recherche des formes.

Remarque. Je suis ici Platonov-Rapinchuk 2.3.4, pp. 86-92. Ils prétendent reprendre l'article de Weil, mais je ne suis pas entièrement convaincu par leurs démonstrations (parfois elliptiques et plus : des arguments me semblent faux). Je vais appliquer systématiquement le théorème (1.2.1) et rester plus près de la preuve de Weil.

Je fixe une fois pour toute une extension galoisienne finie M/K. Les formes considérées sont des M/K-formes.

On rappelle que le groupe des automorphismes d'un groupe simple simplement connexe est isomorphe au produit semi-direct du groupe des automorphismes intérieurs par le groupe des automorphisme du diagramme de Dynkin.

2.1 Les formes intérieures de SL_N.

Soit $\mathbb{G}$ une M/K-forme intérieure de SL_N. Le groupe des automorphismes intérieurs de $SL_N(M)$ est $PSL_N(M)$. Soit A la K-algèbre $M_N(K)$. Alors $SL_N(K)$ est naturellement une sous-variété fermée de $M_N(K)$ (via le déterminant). $PSL_N(M)$ se plonge naturellement dans $Aut_M(A_K)$ (attention : il s'agit des automorphismes de M-espace vectoriel). Soit $f : \mathbb{G} \longrightarrow SL_N$ un M-isomorphisme. Le cocycle $c_\sigma = f \circ f^{-\sigma}$ est formé d'éléments de $Aut_M(A_K)$ Puisque les c_σ sont des automorphismes d'algèbres, ils stabilisent le tenseur définissant la structure d'algèbre de A. D'après le résultat de Weil, il existe une K-algèbre simple A_1 et un M-isomorphisme ϕ : $A_M \longrightarrow A_{1,M}$, tel que

$$\Phi^{-1} \circ \Phi^{\sigma} = f \circ f^{-\sigma}. \tag{2.1.1}$$

Par construction, Φ se restreint en un M-isomorphisme

$$SL(A_M) \longrightarrow SL(A_{M,1}).$$

Cet isomorphisme n'est pas défini sur K en général. Cependant le composé $\Phi \circ f : \mathbb{G} \longrightarrow SL(A_{1,M})$ est un M isomorphisme stable par Galois, par (2.1.1). Cet isomorphisme est donc défini sur K et induit un K-isomorphisme de groupes algébriques : $\mathbb{G} \simeq SL(A_1)$.

Puisque A est centrale, A_1 l'est aussi. On a donc $SL(A_1) = SL(m, D)$, pour une K-algèbre à division centrale D. Donc :

(2.1.1) THÉORÈME. *Les formes intérieures de SL_N, sont les groupes $SL(m, D)$, pour des entiers $m \geqslant 1$ et des algèbres à division centrales D, de degré d^2 sur K, tels que $N = md$.*

2.2 Les formes de Sp_{2N}.

Le diagramme de Dinkyn de C_n n'a pas de symétries; de plus Sp_{2N} est simplement connexe. Donc tous les automorphismes de Sp_{2N} sont intérieurs.

Rappelons que si J est la matrice antisymétrique standard, on a $Sp_{2N} = \{X \in GL_{2N} ; {}^tXJX = J\}$. Donc en considérant l'involution τ de première espèce sur M_{2N} définie par $\tau(X) = J^{-1}{}^tXJ$, Sp_{2N} apparaît comme le sous groupe algébrique fermé de GL_{2N} donné par l'équation $\tau(X)X = I_{2N}$.

Soit A l'algèbre $M_{2N}(L)$. On peut plonger les automorphismes intérieurs de Sp_{2N} dans $PGL_{2N}(M) = PGL(A_M)$. Puisque ce sont des automorphismes de l'algèbre A, ils stabilisent le tenseur $t \in T_K$ définissant la structure de A. De plus ils commutent avec τ : si $g \in Sp_{2N}(M) \subset GL_{2N}(M)$, $\tau(gXg^{-1}) = \tau(g^{-1})\tau(X)\tau(g) = g\tau(X)g^{-1}$. Ils stabilisent donc le tenseur $s \in S_K$ définissant l'involution.

Soit $\mathbb{G}$ une M/K-forme de Sp_{2N} et $f : \mathbb{H} \longrightarrow Sp_{2N}$ un M-isomorphisme. On sait qu'il existe $\Phi \in Aut_M(A)$ tel que $\Phi^{-1}\Phi^\sigma = c_\sigma = f \circ f^{-\sigma}$, $\sigma \in \Gamma$. Par le théorème de Weil, il existe une structure de K-algèbre simple à involution (A_1, τ_1) sur le K-espace vectoriel A, tel que $\Phi : (A_M, \tau) \longrightarrow (A_{1,M}, \tau_1)$ soit un M-isomorphisme. Par construction Φ réalise un M-isomorphisme de Sp_{2N} sur le K-groupe algébrique $\mathbb{H} = \{X \in GL(A_1);\ X\tau_1(X) = I_{2N}\}$.

Ecrivons $A_1 = M(m, D)$ pour une algèbre à division centrale D. Puisque $A_1 \simeq A_1^o$, on a $D \simeq D^o$. D possède donc une involution de première espèce $*$. Soit σ_1 l'involution de première espèce sur A_1 donnée par $\sigma_1(x_{ij}) = (x_{ji}^*)$. Par un théorème de l'exposé précédent, il existe une matrice ϵ-hermitienne pour $(D, *)$, telle que $\tau_1 = F^{-1t}X^*F$. Il s'ensuit que $\mathbb{H}$ est le groupe $SU_m(D, f)$ pour la forme ϵ-hermitienne f attachée à F. Comme dans le cas précédent, on a que $\Phi \circ f$ est un K-isomorphisme de $\mathbb{G}$ sur $\mathbb{H} = SU_m(D, f)$.

Puisqu'on connait le type de $SU_m(D, f)$, on en déduit le :

(2.2.1) THÉORÈME. *Les K-formes simplement connexes de type C_N sont les groupes spéciaux-unitaires $SU_m(D, f)$, où D est une algèbre à division de degré $(\frac{2N}{m})^2$, muni d'une involution du premier type si f est hermitienne et du second type sinon.*

2.3 Les autres formes.

Par manque de temps je ne donnerai de démonstrations que pour les formes extérieures de SL_N. C'est la même idée qui est reprise pour SO_N.

Le diagramme de Dynkin de SL_N possède une unique symétrie non triviale. Elle correspond à l'automorphisme extérieur $x \mapsto {}^tx^{-1}$.

Soit A l'algèbre $M_N(K) \oplus M_N(K)$. On plonge SL_N dans A comme variété fermée par $X \mapsto (X, {}^tX^{-1})$.

Les automorphismes d'algèbre de A sont faciles à décrire. Comme ils doivent envoyer une composante simple sur une composante simple de A, on déduit de Skolem-Noether qu'ils sont de la formes

$$(X, Y) \mapsto (Ad(g)X, Ad(h)Y) \text{ ou } (X, Y) \mapsto (Ad(g)Y, Ad(h)X)$$

Le plus important ici est que les automorphismes de SL_N s'obtiennent par restriction des automorphismes

$$(X, Y) \mapsto (Ad(g)X, Ad({}^tg^{-1})Y) \text{ ou } (X, Y) \mapsto (Ad({}^tg^{-1})Y, Ad(g)X).$$

Soit alors $\mathbb{H}$ un automorphisme extérieur de SL_N : il existe un M-isomorphisme $f : \mathbb{H} \longrightarrow SL_N$, tel que parmi les cocycle $c_\sigma = f \circ f^{-\sigma}$, il y en ait au moins un de la forme $Ad(g)({}^tx^{-1})$.

En notant τ l'involution $(X, Y) \mapsto (Y, X)$, SL_N s'identifie à la variété $\{(U, V) \in SL_N \times SL_N;\ \tau(U, V).(U, V) = (I_N, I_N)$. Commes dans les cas précédents, on voit les c_σ comme les restrictions d'éléments de $Aut_{M-alg}(A_M)$. Les c_σ stabilisent le tenseur t définissant la structure d'algèbre et le tenseur s définissant l'involution. On applique à nouveau Weil : il existe une K-algèbre (pas simple à priori), et un M-isomorphisme $\Phi : (A, \tau) \longrightarrow (A_1, \tau_1)$, tel que $c_\sigma = \Phi^{-1} \circ \Phi^\sigma$.

Il s'agit alors de montrer que A_1 est simple et que τ_1 est de seconde espèce (je passe les détails). On obtient alors un K-isomorphisme $\mathbb{G} \longrightarrow SU_m(D, f)$, où d est munie d'une involution de seconde espèce et f est une forme hermitienne.

Noter que si K est un corps local ou glogal, $SU_m(D, f)$ n'est rien d'autre qu'un groupe spécial unitaire associé à une extension quadratique séparable L/K.

On montre :

(2.3.1) THÉORÈME. *(i) Les formes simplement connexes de type B_N sont les groupes de spineurs $Spin_{2N+1}$.*
(ii) Les formes de type D_N sont isogènes à $SU_l(D, f)$, où (D, τ) est une algèbre à division à involution de première espèce, de dimension $(2N/l)^2$, et où τ est du premier type si $\epsilon = 1$ et du second type sinon.

Remarque. Les formes extérieures de D_4 (correspondant à $SO(8)$) posent un problème car le groupe des isométries du diagramme de Dynikin est S_3 et qu'on ne sait pas réaliser les automorphismes extérieurs correspondants comme automorphismes d'une algèbre à division.