UNIVERSITÉ DE POITIERS

Master 2 de
Mathématiques Fondamentales

Année 2010/2011

Une introduction au programme de Langlands

par Paul Broussous

Avant Propos

Ces notes sont un résumé d'un cours de Master 2, deuxième niveau, donné dans le cadre du Master de Mathématiques Fondamentales et Appliquées de l'université de Poitiers (année 2010/2011).

Ces notes ne reflètent le cours que partiellement. On y trouvera des définitions, les énoncés des résultats importants, ainsi que des indications bibliograpiques. Des démonstrations complètes et des exemples très détaillés seront donnés en cours magistral. L'élève est invité à prendre des notes complètes et à les mettre au propre entre les cours.

Tout le long du cours seront distribuées des feuilles d'exercices. Les élèves doivent les préparer et en exposer des solutions lors de séances prises sur les créneaux du cours et prévues à cet effet.

Introduction

Expliquer ce qu'est le programme de Langlands n'est pas chose facile. Celui-ci mélange l'analyse harmonique sur les groupes topologiques non commutatifs, l'arithmétique des groupes de Galois de corps de nombres et la géométrie arithmétique.

Très concrètement, il s'agit de comprendre certaines séries génératrices de la forme

$$L(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s} \ ,$$

convergeant pour $\mathrm{Re}(s)$ assez grand, appelées *fonctions Zêta ou fonctions* L, ou bien *séries de Dirichlet*. Ces fonctions apparaissent naturellement dans diverses branches des mathématiques. Principalement :

a) Les variétés arithmétiques (lieu des zéros d'un polynôme à plusieurs variables à coefficients dans $\mathbb{Z}$ ou dans l'anneau des entiers d'un corps de nombres).

b) Les représentations du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{Q}/Q)$ du corps des rationnels.

c) Les formes automorphes (par exemple les formes modulaires sur le demi-plan de Poincaré pour un sous-groupe de congruence de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$).

Je renvoie le lecteur à l'article de Jean Dieudonné dans l'Encyclopedia Universalis, consacré aux fonctions Zêta ou au bel article *Zeta Functions* [436(V.19), page 1372], de l'Encyclopedic Dictionary of Mathematics, Japan math. Society, MIT Press, deuxième édition.

L'apport de Robert Langlands et d'autres pionniers (pour ne citer que quelques uns : Selberg, Gelfand, Graev, Pyateski-Shapiro, Jacquet, ...) a permis de traduire la théorie classique des formes automorphes en termes de la théorie des représentations des groupes. Un forme modulaire f sur le demi-plan de Poncaré peut ainsi se voir comme un vecteur $v = v_f$ d'une représentation π_f de dimension infinie de $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ fixé par un certain sous-groupe discret $\Gamma \subset G$ (par exemple $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$). Une telle représentation π_f est dite automorphe. Dans [JL], Hervé Jacquet et Robert Langlands vont plus loin. Ils montrent qu'à une représentation automorphe π_f de G, ils peuvent associer une suite infinie de représentations π_p de $\mathrm{GL}(\mathbb{Q}_p)$, pour $p = \infty$ ou $p = 2, 3, 5, 7, ..., 31, ..$ un nombre premier, où $\mathbb{Q}_p$ désigne le corps des nombres p-adiques si p est premier et où par convention $\mathbb{Q}_\infty$ est le corps $\mathbb{R}$.

Jacquet et Langlands montrent que l'on peut associer une fonction $L(s) = L_\pi(s)$ à des représentations automorphes tout-à-fait générale de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$. Ils montrent aussi que la fonction complexe L_π peut s'écrire comme un produit infini :

$$L_\pi(s) = \prod_p L_{\pi_p}(s)$$

où p décrit les nombres premiers et ∞ et où L_{π_p} est un facteur de la forme (du moins pour p premier) :

$$\frac{1}{P(p^{-s})}$$

où P est un polynôme qui dépend de π_p.

Ils montrent que cette fonction L possède de bonnes propriétés analytiques et qu'elle vérifie une équation fonctionnelle.

Le programme (ou *Philosophie*) de Langlands consiste grossièrement en les deux points suivants :

I) Définir la notion de représentation automorphe et construire les fonctions L pour des groupes de matrices très généraux (dits *réductifs* ; par exemple un groupe classique sur le corps des réels ou des complexes : $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$, etc.).

II) Montrer que la plupart du temps les fonctions génératrices qui apparaissent dans les cadre a) ou b) sont en fait des fonctions L de représentations automorphes.

Dans ce cours de Master nous nous intéresserons qu'à l'aspect *local* du programme de Langlands, c'est-à-dire l'étude des représentations π_p. Le cas $p = \infty$ est celui des représentations des *groupes de Lie* comme $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Nous ne traiterons pas cet aspect pour nous consacrer uniquement au cas où p est un nombre premier.

En fait nous traiterons principalement le cas du groupe $\mathrm{GL}(2,F)$, où F est un corps local non archimédien.

Nous nous intéresserons aussi au représentations du groupe $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, où $\bar{F}$ est une clôture séparable de F.

Le but du cours est double :

A) réussir à énoncer la conjecture de Langlands qui relie les représentations de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ aux représentations complexes irréductibles de $\mathrm{GL}(2,F)$

B) Construire toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}(2,F)$.

Il faudra pour cela introduire bon nombre de concepts et d'objets mathématiques. Il ne sera sans doute pas possible de donner toutes les démonstrations ; nous essaierons de détailler les plus significatives.

Notations utilisées dans le cours

On fixe un corps de base F supposé localement compact non-archimédien. On note :

$\varpi = \varpi_F$ le choix d'une uniformisante de F,
$v = v_F$ la valuation de F normalisée de sorte que $v(\varpi) = 1$,
$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_F$ son anneau des entiers,
$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F = \varpi\mathfrak{o}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$,
$\mathbf{k} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ le corps résiduel de F,
q le cardinal de $\mathbf{k}$ (de sorte que $\mathbf{k}$ est isomorphe au corps fini $\mathbb{F}_q$).

L'entier q est une puissance p^f d'un nombre premier p, appelé la caractéristique résiduelle de F. Le corps F est donc soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ (s'il est de caractéristique nulle), soit un corps de séries de Laurent $\mathbb{F}_q((T))$ (si F est de caractéristique p).

Si E/F est une extension finie du corps F, on utilisera des notations similaires pour E : ϖ_E, v_E, $\mathfrak{o}_E$, $\mathfrak{p}_E$, $\mathbf{k}_E$, q_E. On note $e(E/F)$ le degré de ramification de E/F, c'est-à-dire l'entier e tel que $v_E(\varpi_F) = e$, et $f(E/F)$ l'indice d'inertie de E/F, c'est-à-dire l'entier f tel que $[\mathbf{k}_E : \mathbf{k}_F] = f$. L'application norme $E^\times \longrightarrow F^\times$ est notée $N_{E/F}$, et l'application trace $E \longrightarrow F$ est notée $Tr_{E/F}$.

Si R est un anneau possédant une unité 1, on note $R^\times$ le *groupe des unités* de R :

$$R^\times = \{a \in R \ ; \text{ il existe } a',\ aa' = a'a = 1\} \quad .$$

On note $\mathrm{GL}(n, R)$ le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathrm{M}(n, R)$. Si de plus R est commutatif, l'anneau $\mathrm{M}(n, R)$ possède une application déterminant.

Exercices. **1.** *Soit R un anneau commutatif unitaire. Montrer qu'un élément $x \in \mathrm{M}(n, R)$ appartient à $\mathrm{GL}(n, R)$ si et seulement si son déterminant est un élément inversible de R.*
2. *Montrer que* $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ *est d'indice* 2 *dans* $\mathrm{GL}(n, Z)$.

A. La structure du groupe $\mathrm{GL}(N, F)$

A.I. Topologie.

La référence pour cette section est *Topologie Générale* de N. Bourbaki, chapitres 1 et 3 (il est inutile d'apprendre des choses sur les "filtres" ou les "structures uniformes").

Un *espace topologique* est un ensemble E muni d'une famille Ω de parties de E, appelés *ouverts*, qui vérifie les axiomes suivants :

(T1) L'ensemble vide est E sont dans Ω.

(T2) Une réunion quelconque d'éléments de Ω est encore dans Ω.

(T3) Une intersection finie d'éléments de Ω est encore dans Ω.

L'espace topologique est noté (E, Ω). Les complémentaires des éléments de Ω sont appelés les *fermés* de E. Un *voisinage* d'un point x de E est une partie de E qui contient un ouvert qui lui-même contient x.

Une application $f : E_1 \longrightarrow E_2$ entre deux espaces topologiques (E_1, Ω_1) et (E_2, Ω_2) est dite *continue*, si l'image réciproque par f de tout ouvert de E_2 est un ouvert de E_1.

Exemples. **1.** Si (E, d) est un espace métrique, c'est un espace topologique pour l'ensemble Ω des ouverts de E pour la métrique d.
2. Si E est un ensemble quelconque, on le munit de la topologie dite *discrète* en prenant $\Omega = \mathcal{P}(E)$ l'ensemble de *toutes* les parties de E.

Si (E, Ω) est un espace topologique et A une partie de E, on munit A d'une structure d'espace topologique en prenant comme ouverts de A les intersections des ouverts de E avec A. On obtient bien une topologie (**exercice !**), dont les fermés sont les intersections des fermés de E avec A (**le vérifier !**). Cette topologie s'appelle la topologie *induite* de E sur A. Sauf mention expresse du contraire un sous-ensemble de E sera toujours muni de la topologie induite.

Un espace topologique (E, Ω) est dit séparé si pour toute paire de points distincts x et y de E, il existe des voisinages V_x et V_y, de x et y respectivement, qui ne s'intersectent pas.

Un espace topologique (E, Ω) est dit *compact* s'il est séparé et s'il vérifie la propriété de recouvrement suivante :

Si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de E, indexée par un ensemble quelconque I (fini ou infini) , dont la réunion est E, alors on peut trouver un sous-ensemble d'indices fini $J \subset I$ tel que la réunion des O_j, $j \in J$, soit encore égale à E.

On résume cette propriété en disant que *de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Exemple. Si E est un espace métrique, il est automatiquement séparé et il est compact si et seulement si toute suite d'éléments de cet ensemble admet une valeur d'adhérence. On pourra montrer **à titre d'exercice** qu'un ensemble E muni de la topologie discrète est toujours séparé et qu'il est compact si et seulement si il est fini.

Exercice. *Soit (E, Ω) un espace topologique compact et A une partie fermé de E. Montrer que A, munie de la topologie induite, est compacte.*

Proposition. *Soient (E_1, Ω_1) et (E_2, Ω_2) deux espaces topologiques séparés. Soient $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application continue et C un sous-ensemble compact de E_1. Alors $f(C)$ est un compact de E_2.*

Preuve : exercice. Indication : prendre un recouvrement ouvert de $f(C)$ et considérer son image réciproque par f.

Un espace topologique est dit *localement compact* si tout point possède un voisinage compact. Par exemple, la droite réelle $\mathbb{R}$, le corps des complexe $\mathbb{C}$, un corps local non archimédien, sont localement compacts mais non compacts. Par l'exercice précédent, tout espace compact est localement compact.

Exercice. (Compactifié d'Alexandroff). *Soit* (E, Ω) *un espace localement compact. On définit un nouvel ensemble* $\tilde{E}$ *en adjoiniant à* E *un nouveau point* ∞. *On définit une topologie sur* $\tilde{E}$ *en déclarant ouverte toute partie* O *de* $\tilde{E}$ *qui est :*

– *soit un ouvert de* E,

– *soit la réunion d'un ouvert de* E *et du complémentaire d'un compact de* E *dans* $\tilde{E}$.

a) *Montrer qu'il s'agit bien d'une topologie.*

b) *Montrer que* $\tilde{E}$ *muni de cette topologie est compact.*

Un espace topologique (E, Ω) est dit *connexe* si on ne peut pas l'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts non vides.

Proposition. *Soit* (E, ω) *un espace topologique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) (E, Ω) *est connexe ;*

b) E *ne peut s'écrire comme réunion disjointe de deux sous-ensembles fermés non vides ;*

c) *toute application continue de* E *dans* $\{0, 1\}$ *(muni de la topologie discrète) est constante.*

Exercices. **1.** *Décrire les sous-ensemble connexes d'un ensemble discret, resp. de la droite réelle* $\mathbb{R}$.
2. *Montrer que si* $f : E_1 \longrightarrow E_2$ *est une application continue et si* E_1 *est connexe, alors* $f(E_1)$ *est une partie connexe de* E_2.

Soit (E, Ω) un espace topologique et x un point de E. La réunion $C(x)$ de toutes les parties connexes de E contenant x est encore connexe (en effet, remarquer que toute fonction continue f de $C(x)$ dans $\{0, 1\}$ doit prendre la valeur constante $f(x)$). Il en résulte que $C(x)$ est la plus grande partie connexe de E contenant x. On l'appelle le *composante connexe* de x. L'espace E est dit *totalement discontinu* si la composante connexe de tout point x de E est réduite à E.

Exemples. La composante connexe de tout point de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ tout entier. Le corps Q_p, ou plus généralement tout corps localement compact non archimédien est totalement discontinu.

Exercices. **1**. *Montrer que tout ensemble discret est totalement discontinu.*
2. *On munit* $\mathbb{Q}$ *de la topologie induite de celle de* $\mathbb{R}$. *Montrer que c'est un espace topologique totalement discontinu. Indication.* Commencer par remarquer que dans un espace topologique, si une partie ouverte et fermée contient un point x, elle contient aussi sa composante connexe. Remarquer ensuite que dans $\mathbb{Q}$, l'intervalle $]\alpha, \gamma[$, où $\alpha < \gamma$ sont irrationels, est ouvert et fermé.

Soit (E, Ω) un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. considérons l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ formé des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. On a une application surjective canonique $p : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$, appelée *projection* qui à un élément x de E associe sa classe d'équivalence (notée $\mathrm{Cl}(x)$ ou bien $\bar{x}$).

Proposition-définition. *Avec les notations précédentes, l'ensemble $\Omega_{\mathcal{R}}$ formé des parties O de $E/\mathcal{R}$ telles que $p^{-1}(O)$ est ouvert définit une topologie sur E.*

En d'autres termes, une partie O de $E/\mathcal{R}$ est ouverte si et seulement si $p^{-1}(O)$ est ouverte dans E. On montre alors facilement qu'une partie F de $E/\mathcal{R}$ est fermée si et seulement si $p^{-1}(F)$ est fermée.

Proposition. *Soit (E, Ω) une espace topologique et supposons E muni d'une relation d'équivalence $\mathbb{R}$. Alors si E est connexe, il en est de même de $E/\mathcal{R}$. Si E est compact, alors $E/\mathcal{R}$ possède la propriété de recouvrement, mais n'est pas forcément séparé.*

Soient (E_i, Ω_i), $i = 1, ..., n$, un nombre fini d'espaces topologiques. La *topologie produit* sur le produit cartésien $E = \prod_{i=1,\ldots,n} E_i$ est la topologie dont les ouverts sont d'une des formes suivantes :

a) un ouvert dit *élémentaire* $O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n$, où chaque O_i est un ouvert de E_i.
b) (ou plus généralement) une réunion quelconque d'ouverts élémentaires.

Les projections $\mathrm{pr_i} : E \longrightarrow E_i$, $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$, sont alors continues.

Proposition. *Avec les notations précédentes, soit F un autre espace topologique et $f \;\; F \longrightarrow E = \prod E_i$ une application. Notons f_1, ...,f_n les composantes de f :*

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)) \ .$$

Alors f est continue si et seulement si chaque f_i est continue.

Exercice. *Montrer qu'un produit cartésien d'espaces compacts est compact.*

Nous allons à présent appliquer toutes ces notions aux groupes (chapitre III du livre de Bourbaki).

Un *groupe topologique* est un ensemble G qui est à la fois un groupe (noté multiplicativement) et un espace topologique (en général on ne désigne pas son ensemble d'ouverts par un symbole spécial), tel que les deux structures soient compatibles :

(GT1) L'application *inverse* $G \longrightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ est continue,

(GT2) L'application produit $G \times G \longrightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$ est continue comme fonction de 2 variables.

Exemples. Si K est un corps localement compact ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, F local non archimédien), le groupe additif $(K, +)$ et le groupe multiplicatif $(K^\times, \times)$ sont des groupes topologiques. De même le groupe $\mathrm{GL}(n, K)$ peut se voir comme un groupe topologique de la façon suivante. On identifie $\mathrm{M}(n, K)$ à l'espace vectoriel K^{n^2}, c'est-à-dire au produit cartésien de n^2 copies de K, que l'on munit de la topologie produit. Alors $\mathrm{GL}(n, K)$ est un ouvert de K^{n^2} (complémentaire du fermé $\mathrm{Det}^{-1}(0)$), que l'on munit de la topologie induite. Les applications $g \mapsto g^{-1}$ et $(g,h) \mapsto gh$ sont continues car les composantes de ces applications le sont (ce sont des fractions rationnelles dans le premier cas et des polynômes dans le second).

Proposition. *Soient G un groupe topologique et a, b deux éléments de G. Les applications suivantes sont des homéomorphismes de G dans G :*

- *la translation à gauche $g \mapsto ag$,*
- *la translation à droite $g \mapsto gb$,*
- *l'application $g \mapsto agb$,*
- *l'application qui donne l'inverse $g \mapsto g^{-1}$.*

On en déduit les propriétés importantes suivantes. Les voisinages d'un élément g de G sont les parties des la forme gV (resp. Vg), où V est un voisinage de e (en d'autres termes, pour décrire la topologie de E, il suffit de connaitre les voisinages de e). Si g et h sont conjugués par x, i.e. si $g = xhx^{-1}$, alors la conjugaison par x transporte les voisinages de h sur ceux de g.

Proposition. *Un groupe topologique est séparé si et seulement si le singleton $\{e\}$ (e est l'élément neutre) est fermé.*

Démonstration. Commençons par montrer le lemme suivant.

Lemme. *Un espace topologique E est séparé si et seulement si la diagonale*

$$\Delta = \{(x,x)\ ;\ x \in E\}$$

est un fermé du produit cartésien $E \times E$.

En effet le complémentaire de Δ est l'ensemble des couples (x,y), $x \neq y$. Dire qu'il est ouvert signifie que si $x \neq y$, on peut trouver un voisinage élémentaire de (x,y), i.e. de la forme $U \times V$, $x \in U$, $y \in V$, tel que $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Mais ceci signifie exactement que les voisinages U et V séparent x et y·

Revenons à la proposition. Si E est séparé, il est clair que $\{e\}$ est fermé. Si ça n'était pas le cas, on ne pourrait pas séparer un point adhérent à $\{e\}$ différent de e de e lui-même. Réciproquement, si $\{e\}$ est fermé, la diagonale Δ l'est aussi comme image réciproque de $\{e\}$ par l'application continue $G \times G$, $(x,y) \mapsto xy^{-1}$. On applique alors le lemme.

Si G est un groupe topologique, tout sous-groupe H de G muni de la topologie induite est un groupe topologique (le vérifier en **exercice**).

Proposition.1. *Un sous-groupe H d'un groupe topologique G est ouvert si et seulement si il possède un point intérieur.*
2. *Un sous-groupe H ouvert est automatiquement fermé.*

Démonstration. Si H possède un point x_0 intérieur, alors x_0 possède un voisinage contenu dans H. On conclut en translatant ce voisinage.

Supposons H ouvert et écrivons G comme réunion de ses classes à droite modulo H :

$$G = \coprod_{i \in I} g_i.H\ ,$$

où les g_i, $i \in I$, sont un système de représentants des classes. Chaque $g_i.H$ est ouvert. Si i_0 est l'indice tel que $g_{i_0}.H = H$, on a que H est le complémentaire de l'ouvert $\coprod_{i \neq i_0} g_i.H$. CQFD.

Exercices. *Ici G désigne un groupe topologique et H un sous-groupe.*

1. *Montrer que l'adhérence $\bar{H}$ de H est encore un sous-groupe.*

2. *Montrer que si H est distingué, $\bar{H}$ l'est aussi.*

3. *Montrer que si G possède un point isolé, il est discret.*

4. *Montrer que si G est séparé, son centre est fermé.*

Rappelons que si H est un sous-groupe d'un groupe G, l'ensemble quotient (encore appelé ensemble *homogène*) G/H est le quotient de G par la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^{-1}y \in H$. Si G est un espace topologique, l'espace topologique quotient s'appelle l'*espace homogène* obtenu en quotientant par H à droite (on considère de même des quotient à gauche).

On suppose dorénavant que G est un groupe topologique. Le groupe G opère sur l'ensemble G/H par translation à gauche : l'action de $g \in G$ sur la classe xH est la classe gxH. On note $(g, \bar{x}) \mapsto g.\bar{x}$ cette action.

Proposition. *L'action de G sur G/H est continue. Autrement dit, l'application*

$$f \ : \quad G \times G/H \longrightarrow G/H \ , \ (g, \bar{x}) \mapsto g.\bar{x}$$

est continue.

Démonstration. Soit Ω un ouvert de G/H. Nous devons démontrer que $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert du produit $G \times G/H$. Par définition $\tilde{\Omega} = \{x \in G \ ; \ xH \in \Omega\}$ est un ouvert de G. On a :

$$f^{-1}(\Omega) = \{(g, xH) \ ; \ gxH \in \Omega\} = \{(g, xH) \ ; \ gx \in \tilde{\Omega}\} \ .$$

Nous devons prouver que tout $(g_o, x_oH) \in f^{-1}(\Omega)$ est intérieur. Puisque $g_0x_0 \in \tilde{\Omega}$ et que l'application $m : G \times G \longrightarrow G$ est continue, il existe un voisinage U_0 de g_o et un voisinage V_0 de x_0 tels que $m(U_0 \times V_0) \in \tilde{\Omega}$. On voit alors que $U_0 \times p(V_0H)$ est un ouvert de $G \times G/H$ contenant (g_0, x_0H), et contenu dans $f^{-1}(\Omega)$ (ici $p : G \longrightarrow G/H$ est la projection canonique). CQFD.

Proposition. *Soient G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Pour que l'espace homogène G/H soit séparé il faut et il suffit que H soit fermé dans G.*

Démonstration. Si G/H est séparé, le singleton $\{H\}$ est fermé. Donc si $p : G \longrightarrow G/H$ désigne la projection canonique (qui est continue par définition !), $H = p^{-1}(\{H\}$ est fermé. *Indication.* Soient $xH \neq yH$ dans G/H. Il faut les séparer par des ouverts. L'hypothèse s'écrit $x^{-1}y \in H$, i.e. $x^{-1}y$ est dans l'ouvert $G \backslash H$. Utiliser alors la continuité de l'application $(x, y) \mapsto x^{-1}y$.

Exercice. *Le quotient G/H est discret si et seulement si H est ouvert dans G.*

Lorsque le sous-groupe H est distingué, l'ensemble quotient G/H est muni lui-même d'une structure de groupe par $(xH).(yH) = (xy)H$.

Proposition. *Si H est distingué la topologie quotient sur G/H est compatible avec sa structure de groupe. Ainsi G/H a la structure d'un groupe topologique.*

Démonstration. [BouTG] TG III.13, No 6.

Soit maintenant F un corps localement compact, non archimédien, muni de sa valeur absolue normalisée $x \mapsto |x|_F = |x|$. Si n est un entier $\geqslant 1$, on munit le F-espace vectoriel F^n de la topologie produit. Les ouverts élémentaires sont de la forme $U_1 \times \cdots \times U_n$, les U_i étant des ouverts de F. Les ouverts quelconques sont réunions quelconques d'ouverts élémentaires.

Une *norme* sur F^n est une application $N : F^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

a) $N(v) = 0$ ssi $v = 0$,

b) $N(\lambda v) = |\lambda|_F N(v)$,

c) $N(u + v) \leq \sup(N(u), N(v))$.

La norme la plus simple sur F^n est donnée par

$$N_0(x_1, ..., x_n) = \sup\{|x_i|_F \ ; \ i = 1, ..., n\} \ .$$

A une norme N, on peut associer une distance d par la formule $d(u, v) = N(v - u)$. Toute norme définit donc une topologie. Nous admettrons le théorème suivant, analogue du théorème bien connu sur les espaces vectoriels réels de dimension fini ([We] Chap. II, §1, Prop. 1) :

Théorème. *toutes les normes sur K^n définisse la même topologie : la topologie produit définie plus haut.*

Remarque. On peut en réalité remplacer F^n par n'importe quel F-espace vectoriel de dimension finie V. Toutes les normes sur un tel espace définiera la même topologie, i.e. celle de V identifié à F^n par le choix de n'importe quelle base.

Nous appelerons *naturelle* la topologie obtenue dans le théorème précédent. L'espace F^n est *localement compact*. En effet cela découle du fait que F l'est. Si $x \in F$, $x + \mathfrak{o}_F$ est un voisinage compact de x. Il s'ensuit que si $(x_1, ..., x_n)$ est un point de F^n, $(x_1 + \mathfrak{o}_F) \times \cdots \times (x_n + \mathfrak{o}_F)$ (produit cartésien de compact) est un voisinage compact de $(x_1, ..., x_n)$.

Exercice. *Montrer que F^n est totalement discontinu.*

Nous admettrons le résultat suivant, généralisation d'un théorème bien connu pour les espaces vectoriels réels de dimension finie.

Théorème. *Une partie de F^n est compacte si est seulement si elle est fermée et bornée pour n'importe quelle norme.*

Rappelons que nous munnissons $\mathrm{GL}(n,F)$ d'une structure de groupe topologique en l'identifiant à l'ouvert de $F^{n^2} \simeq \mathrm{M}(n,F)$, lieu des points où le déterminant ne s'annule pas.

Proposition. Le groupe topologique $\mathrm{GL}(n,F)$ est localement compact et non compact.

Démonstration. Pour chaque entier $k \geqslant 1$, notons K_k le sous-ensemble des matrices (a_{ij}) telles que $|a_{ij}| \leqslant q^{-k}$ si $i \neq j$ et $|a_{ii}-1| \leqslant q^{-k}$. C'est un sous-ensemble compact (resp. ouvert) de $\mathrm{M}(n,F) \simeq F^{n^2}$ car c'est un produit de compacts (resp. fermés), chacun étant la boule $B_f(0,q^{-k})$ ou bien $B_f(1,q^{-k})$. En développant le déterminant d'un élément de K_k, on voit qu'il est $\equiv 1 \bmod \mathfrak{p}_F$. En particulier, il est non nul. Il s'ensuit que K_k est un ouvert-compact de $\mathrm{GL}(n,F)$ et que l'élément neutre possède un voisinage compact. Par translation tout élément du groupe admet un voisinage compact.

Munissons F^{n^2} de la norme $N_0(a_{ij}) = \sup\{|a_{ij}|_F \ ;\ i,j = 1,...,n^2\}$ et considérons la suite d'éléments de $\mathrm{GL}(n,F)$ donnée par $g_u = 1 + \varpi^{-u}E_{ij}$, où (i,j) est un couple d'indices fixés et où E désigne une matrice élémentaire. Alors $N_0(g_u) = q^u$ tend vers $+\infty$ quand u tend vers $+\infty$. Il s'ensuit que $\mathrm{GL}(n,F)$ n'est pas borné et, a fortiori, pas compact.

Par définition de la topologie produit, il est facile de voir qu'un sous-ensemble V de $\mathrm{GL}(n,F)$ est un voisinage de l'élément neutre si, et seulement si, il existe un k tel que $V \supset K_k$. On dit que l'ensemble des ouverts K_k, $k \geqslant 1$, est un système fondamental de voisinages ouverts de l'élément neutre (cf. [BouTP], Définition 5, TG I.4 §1). On en déduit qu'une partie O de $\mathrm{GL}(n,F)$ est ouverte si, et seulement si, pour tout $g \in O$, il existe k assez grand tel que $gK_k \subset O$.

A.II. Action sur les droites vectorielles et les réseaux.

Nous supposons pour simplifier que $n = 2$ et l'on pose $G = \mathrm{GL}(2,F)$. Ce groupe agit naturellement sur le F-espace vectoriel F^2. Il agit donc sur l'ensemble des droites vectorielles de ce derniers. L'ensemble des droites vectorielles peut se voir comme l'espace projectif $\mathrm{P}^1(F)$, c'est-à-dire le quotient de $F^2 \backslash \{(0,0)\}$ par la relation d'équivalence : $(x,y) \simeq (u,v)$ s'il existe $\lambda \in F^\times$, $(x,y) = \lambda(u,v)$. Comme d'habitude on note $[x:y]$ la classe de (x,y). On munit $\mathrm{P}^1(F)$ de la topologie quotient.

Proposition. *L'espace projectif* $\mathrm{P}^1(F)$ *est compact.*

Démonstration. Soit $[x:y] \in \mathrm{P}^1(F)$. On a par exemple $v_F(x) \geqslant v_F(y)$ (de sorte que y n'est pas nul). Donc $xy^{-1} \in \mathfrak{o}_F$. Quitte à changer de représentant, on peut donc supposer que $[x,y] = [x,1]$, avec $x \in \mathfrak{o}$. Il s'ensuit que $\mathrm{P}^1(F)$ est l'image du compact $(\mathfrak{o} \times 1) \cup (1 \times \mathfrak{o})$. Il est donc compact.

Le groupe de $\mathrm{GL}(2,F)$ agit transitivement sur les droites de F^2 (ou de façon équivalente sur $\mathbb{P}^1(F)$). Le stabilisateur d'une droite s'appelle un *sous-groupe de Borel.* Puisque l'action est transitive, les sous-groupes de Borel sont conjugués deux-à-deux. Le stabilisateur de la droite $D_+ = F(1,0)$ s'appelle le sous-groupe de Borel *standard.* C'est l'ensemble B (B en hommage au mathématicien Armand Borel) des matrices inversibles de la forme :

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Le stabilisateur $\bar{B}$ de la droite $D_- = F(0,1)$ est l'ensemble des matrices triangulaires inférieures. Le stabilisateur simultané de D_+ et D_- est l'ensemble $T = \bar{B} \cap B$ formé des matrices inversibles diagonales. On l'appelle le *tore diagonal.*

Exercice. *Montrer que la bijection naturelle* $\mathrm{GL}(2,F)/B \longrightarrow \mathbb{P}^1(F)$ *est un homéomorphism. En déduire que* $\mathrm{GL}(2,F)/B$ *est un espace topologique compact.*

Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur F. Un $\mathfrak{o}$*-réseau* de V est un sous-$\mathfrak{o}$-module de V, de type fini, et qui engendre V comme F-espace vectoriel.

Proposition ([BH](1.5), page 10). *Soit L un $\mathfrak{o}$-réseau de V. Il existe une base $(v_1, ..., v_n)$ de V sur F telle que $L = \bigoplus_{i=1,...,n} \mathfrak{o} v_i$, c'est-à-dire :*

$$L = \{ \sum_{i=1,...,n} x_i v_i \ ; \ x_1, ..., x_n \in \mathfrak{o} \} \ .$$

Démonstration. Soit $\{v_1, ..., v_m\}$ une partie de L de cardinalité minimale pour la propriété d'engendrer L comme $\mathfrak{o}$-module. Par hypothèse, elle engendre V comme F-espace vectoriel. En fait c'est même une base de V. Dans le cas contraire, la famille des v_i est liées :

$$\sum_{i=1,...,m} a_i v_i = 0$$

pour des a_i non tous nuls. En multipliant par une élément non nul de F bien choisi, on peut supposer que les a_i sont dans $\mathfrak{o}$, et que l'un d'entre eux a_j est inversibles dans $\mathfrak{o}$. On en déduit que v_j est dans le $\mathfrak{o}$-module engendré par les autres vecteurs, ce qui contredit la minimalité de m.

Supposons $V = F^n$. Puisque $\mathrm{GL}(n,F)$ agit transitivement sur les bases de V, on a le

Corollaire. *Le groupe* $\mathrm{GL}(n,F)$ *agit transitivement sur l'ensemble des $\mathfrak{o}$-réseaux de F^n.*

Exercice. *Montrer que le stabilisateur du réseau $\mathfrak{o}^n$ de F^n est le sous-groupe* $\mathrm{GL}(n,\mathfrak{o})$ *des matrices de* $\mathrm{M}(n,\mathfrak{o})$ *qui sont inversibles dans* $\mathrm{M}(n,\mathfrak{o})$.

A.II. Les diverses décompositions.

Soient G un groupe et H, K, deux sous-groupes de G. On met un relation d'équivalence sur G en posant :

$$g_1 \mathcal{R} g_2 \text{ s'il existe } h \in H \text{ et } k \in K \text{ t.q. } g_2 = h g_1 k \ .$$

(C'est en effet un relation d'équivalence !) Un classe d'équivalence pour cette relation est forcément de la forme

$$HgK = \{hgk \; ; \; h \in H \; , \; k \in K\}$$

Un tel ensemble s'appelle une *double classe* (de représentant g) selon H et K. L'ensemble des doubles classes est noté $H\backslash G/K$. Le groupe G est réunion disjointe de ses doubles classes.

Trouver un *système de représentants* du double quotient $H\backslash G/K$ signifie trouver une famille $(g_i)_{i\in I}$ d'éléments de G tels que G soit la réunion disjointe des Hg_iK, lorsque i parcourt I.

Dans la suite on pose $G = \mathrm{GL}(n, F)$.

A.II.1. La décomposition de Bruhat.

Dans cette section que corps F peut être supposé quelconque (pas forcément localement compact non archimédien).

Soit T le sous-groupe de G des matrices inversibles et diagonales. On note $N(T)$ l'ensemble des *matrices monomiales*, c'est-à-dire des matrices ayant, dans chaque ligne et chaque colonne, exactement un élément non-nul. Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de F^n de la forme $D_i = F(0, ..., 1, ..., 0)$ (1 à la $i$ème place), $i = 1, ..., n$. Il est clair que $\mathcal{D}$ est stable par l'action de $N(T)$. Réciproquement un endomorphisme de G qui permute l'ensemble D est forcément dans $N(T)$ (**exercice** !).

On appelle *normalisateur* d'un sous-groupe H de G, l'ensemble $N_G(H)$ des éléments g de G tels que $gHg^{-1} = H$.

Proposition. *Le normalisateur $N_G(T)$ de T dans G est $N(T)$.*

Démonstration. Si $g \in G$ normalise T, il permute les sous-espaces propres de dimension 1 des éléments de T. Il permute donc l'ensemble $\mathcal{D}$.

Soit $W \subset N(T)$ le sous-groupe de G formé des matrices de permutations (une seule entrée non nulle égale à 1 dans chaque ligne et chaque colonne).

Proposition-Définition.*Le groupe $N(T)$ est égal au produit semidirect $W \ltimes T$ de W par T (T est un sous-groupe normal). Donc le quotient $N(T)/T$ est isomorphe à W. On l'appelle le* groupe de Weyl *de G.*

Exemple. Si $n = 2$, on a

$$W = \{I_2, w\} \text{ où } w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et

$$N(T) = T \cup wT = T \cup Tw = \{\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}\} \cup \{\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}\} .$$

Théorème (Décomposition de Bruhat.) *Un système de représentants du double quotient $B\backslash G/B$ est W (ici B désigne le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures).*

Démonstration. Pour le cas général, voir le document distribué en cours. Une version explicite du cas $n=2$ est la suivante. Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de G. Si $c=0$, g est dans la double classe $B.I_2.B = B$. Si $c \neq 0$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta/c & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $\Delta = ad - bc$, de sorte que g appartient à la double classe $B.w.B$.

A.II.2. La décomposition de Cartan

On note $K = \mathrm{GL}(n, \mathfrak{o})$ le sous-groupe de G formé des matrices dans $\mathrm{M}(n, \mathfrak{o})$ inversibles dans $\mathrm{M}(n, \mathfrak{o})$. Noter que $g \in G$ est dans K si et seulement si g est à coefficients dans $\mathfrak{o}$ est à déterminant dans $\mathfrak{o}^\times$. Noter que K contient les matrices de permutations. On note A^+ le semi-groupe des matrices de la forme $\mathrm{diag}(\varpi^{k_1}, ..., \varpi^{k_n})$, où $(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n$ est un n-uplet d'entiers relatifs vérifiant $k_1 \leq k_2 \cdots \leq k_n$.

Théorème (Décomposition de Cartan). *L'ensemble A^+ est un système de représentants du double quotient $K\backslash G/K$.*

Démonstration. Pour le cas général, consulter K.S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, New York, 1989, page 129. Regardons le cas $n=2$ ([BH], page 51). Partons d'une matrice $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G. En la multipliant à gauche par w (resp. à droite, à gauche et à droite), on peut échanger les deux lignes (resp. les deux colonnes, faire une symétrie centrale). On peut donc supposer que le coefficient de g avec la plus petite valuation est a. Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c/a & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont alors dans K est on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c/a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \Delta/a \end{pmatrix}.$$

De plus $v_F(\Delta/a^2) = v_F(d/a - (b/a)(c/a)) \geqslant 0$, de sorte que $v_F(a) \leqslant v_F(\Delta/a)$. On peut donc écrire $\mathrm{diag}(a, \Delta/a) = \mathrm{Diag}(u, v)\mathrm{Diag}(\varpi^{v_F(a)}, \varpi^{v_F(\Delta/a)})$. Le résultat en découle. Les entiers k_1 et k_2 sont entièrement déterminé puisque $k_1 + k_2$ est $v_F(\mathrm{Det}(g))$ et k_1 est la plus petite valuation des coefficients de g.

Corollaire. 1) *Soient L_1 et L_2 deux $\mathfrak{o}$-réseaux de F^n. Il existe une base $(v_1, ..., v_n)$ de F^n, des entiers relatifs $k_1 \leqslant k_2 \leqslant \cdots \leqslant k_n$, tels que*

$$L_1 = \mathfrak{o}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{o}v_n \textit{ et } L_2 = \mathfrak{o}\varpi^{k_1}v_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{o}\varpi^{k_n}v_n .$$

2) *L'intersection et la somme de deux* $\mathfrak{o}$*-réseaux sont encore des* $\mathfrak{o}$*-réseaux.*

3) *Soient* L_1 *et* L_2 *deux réseaux de* F^n*. Alors pour* n *assez grand, on a* $\varpi^n L_1 \subset L_2$*.*

Les points 2) et 3) découlent de 1) par un calcul direct. Prouvons 1). On sait qu'il existe des bases $(e_1, ..., e_n)$ et $(f_1, ..., f_n)$ de F^n telles que :

$$L_1 = \mathfrak{o}e_1 \oplus \cdots \mathfrak{o}e_n \text{ et } L_2 = \mathfrak{o}f_1 \oplus \cdots \mathfrak{o}f_n \ .$$

Soit g la matrice de passage de la base (e_i) à la base (f_i) (matrice du système décrivant les f_i comme combinaisons linéaires des e_i. Ecrivons $g = k_1^{-1} t k_2$, où $k_1, k_2 \in K$ et $t \in A^+$. Soient (w_i) la base de F^n telle que la matrice de passage de (f_i) à (w_i) est k_1, et (v_i) la base de F^n telle que la matrice de (e_i) à v_i est k_2. Puisque ces matrices de passage sont à coefficients dans $\mathfrak{o}$ et inversibles dans $\mathfrak{o}$, les bases (w_i) et (v_i) sont des bases des $\mathfrak{o}$-modules L_2 et L_1 respectivement. De plus elles sont reliées par la relation $w_i = \varpi^{k_i}$, $i = 1, ..., n$, où $t = \mathrm{Diag}(\varpi^{k_1}, ..., \varpi^{k_n})$. Le résultat en découle.

A.II.3. La décompositon d'Iwasawa.

Théorème (décomposition d'Iwasawa, [BH], page 50). *Soit* B *le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures et* K *le sous-groupe* $\mathrm{GL}(n, \mathfrak{o})$*. On a la décomposition* $G = BK$*. Autrement dit toute matrice de* G *s'écrit comme produit d'une matrice de* B *et d'une matrice de* K*. Il n'y a pas unicité.*

Démonstration. Il n'y a pas unicité parce que $B \cap K$ est non trivial. Nous donnons la démonstration pour $n = 2$. Partons de $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. Si $c = 0$, $g \in B$ et le résultat est trivial. Sinon, quitte à échanger les deux colonnes (en multipliant par $w \in K$ à droite), on peut supposer que $v_F(c) \geqslant v_F(d)$. On a alors que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c/d & 1 \end{pmatrix} \in B$$

avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c/d & 1 \end{pmatrix} \in K$.

Exercice. *En utilisant des opérations élémentaires sur les matrices, démontrer le théorème dans le cas général.*

Corollaire. *L'espace topologique quotient* G/B *est compact.*

Démonstration. Le quotient G/B est séparé car B est un sous-groupe fermé de G (image réciproque de 0 par l'application continue

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto c \ .$$

Par le théorème précédent, la restriction à K de la projection canonique $p : G \longrightarrow G/B$ est surjective. ce qui prouve que G/B, image d'un compact par une application continue, est lui-même compact.

A.III. Chaînes de réseaux et compacts maximaux modulo le centre [BH]§12, page 86.

On travaille dans un F-espace vectoriel V de dimension $n > 0$. Pour fixer les idées, on supposera de plus que $n = 2$ et $V = F^2$.

Si L est un $\mathfrak{o}$-réseau dans V (qu'on abrégera en *réseau*), alors pour tout élément g de $G = \mathrm{GL}_F(V) = \mathrm{GL}(2, F)$, l'ensemble gL est aussi un réseau. En particulier pour tout $x \in F^\times$, xL est un réseau, dit *homothétique* à L.

On appelle *chaîne d'$\mathfrak{o}$-réseaux* (ou plus simplement *chaîne de réseaux*) dans V, un ensemble de réseaux $\mathfrak{L} = \{L_k \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$ tel que :

a) la suite $(L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est strictement décroissante ;

b) l'ensemble $\mathfrak{L}$ est stable par homothétie (i.e. par multiplication par un élément de $F^\times$).

Autrement dit, $L_k \supsetneq L_{k+1}$, pour tout k dans $\mathbb{Z}$, et pour tout $x \in F^\times$, il existe une bijection $\sigma_x \ : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, telle que $xL_k = L_{\sigma_x(k)}$. Pour $x \in F^\times$, la fonction σ_x est une bijection décroissante de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, c'est donc une translation de la forme $k \mapsto k_x$. L'entier n_ϖ ne dépend pas du choix de l'uniformisante ϖ, s'appelle la *période* de $\mathfrak{L}$ et se note $e = e_{\mathfrak{o}}(\mathfrak{L})$. On en déduit que pour tout $x \in F^\times$:

$$xL_k = L_{k+ev_F(x)} \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Il est clair que pour $g \in G$, si $\mathfrak{L} = (L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une chaîne de réseaux, alors $g\mathfrak{L} := (gL_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ en est une autre de même période.

Le résultat suivant nous dit que l'action de G dans l'ensemble des chaînes de réseaux possède exactement deux orbites :

Proposition [BH](12.1). *Soit $\mathfrak{L} = (L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une chaîne de réseaux dans F^2. Alors $e(\mathfrak{L}) =$ 1 ou 2. De plus :*

1) *Si $e(\mathfrak{L}) = 1$, il existe $g \in G$ tel que*

$$gL_k = \mathfrak{p}^k \oplus \mathfrak{p}^k \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

2) *Si $e(\mathfrak{L}) = 2$, il existe $g \in G$, tel que*

$$gL_{2k} = \mathfrak{p}^k \oplus \mathfrak{p}^k \ , \ gL_{2k+1} = \mathfrak{p}^k \oplus \mathfrak{p}^{k+1} \ , \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Démonstration. Posons $e = e(\mathfrak{L})$. Le quotient $L_0/L_e = L_0/\mathfrak{p}L_0$ a une structure naturelle d'espace vectoriel sur le corps résiduel $\mathbf{k}$. En effet, c'est déjà un groupe additif, et on définit une multiplication externe par

$$\bar{x}.\bar{v} = \bar{x.v} \ ,$$

où $\bar{x}$ désigne la classe de $x \in \mathfrak{o}$ dans $\mathbf{k} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ et $\bar{v}$ désigne la classe de $v \in L_0$ dans $L_0/\mathfrak{p}L_0$. Il est de dimension 2 car une de ses bases est formée de l'image dans le quotient d'une base de L_0 comme $\mathfrak{o}$-module. Les quotients $L_k/\mathfrak{p}L_0$, $k = 1, .., e-1$ forment une suite strictement décroissante de sous-$\mathbf{k}$-espaces vectoriels propres. On a donc forcément $e - 1 \leqslant 1$, i.e. $e \leqslant 2$.

Le groupe G agissant transitivement sur les réseaux, il existe $g \in G$ tel que $gL_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}$. Donc si $e = 1$, on a $gL_k = \mathfrak{p}^k \oplus \mathfrak{p}^k$, $k \in \mathbb{Z}$, comme désiré.

Supposons donc $e = 2$. On a $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o} \supset gL_1 \supset \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}$. Donc $W = gL_1/(\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p})$ est un sous-$\mathbf{k}$-espace de dimension 1 de $(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o})/(\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}) = \mathbf{k} \oplus \mathbf{k}$. Le groupe $\mathrm{GL}(2, k)$ agit transitivement sur les droite de $\mathbf{k}^2$. Il existe donc $\mathbf{h} \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{k})$ tel que $\mathbf{h}.W = \mathbf{k} \oplus 0$.

Prenons $h \in \mathrm{M}(2, \mathfrak{o})$ au hasard tel $\mathbf{h}$ s'obtienne en réduisant les coefficients de h modulo $\mathfrak{p}$. Alors h est forcément dans $\mathrm{GL}(2, \mathbf{k})$. En effet on a $\det(h) \in \mathfrak{o}$, et $\det(h)$ *mod* $\mathfrak{p} = \det(\mathbf{h}) \neq 0$, de sorte que $\det(h) \in \mathfrak{o}^\times$. J'affirme alors que $h(gL_1) = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{p}$. Pour cela, on remarque que par construction, la réduction modulo $\mathfrak{p}(\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o})$ de $h(gL_1)$ est égale à $\mathbf{k} \oplus 0$ et on utilise le résultat suivant dont la démonstration est laissée en exercice.

Lemme. *Soit L un réseau de F^2. L'application qui à un réseau M vérifiant $L \subset M \supset \mathfrak{p}L$ associe sa réduction modulo $\mathfrak{p}L$ est une bijection entre les réseaux intermédiaires entre L et $\mathfrak{p}L$ et les sous-$\mathbf{k}$-espaces vectoriels de $L/\mathfrak{p}L$.*

Puisque $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{o})$ stabilise $\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}$, on a $(hg)L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}$ (et $(hg)L_1 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{p}$). Les autres égalités de la proposition s'obtiennent par périodicité.

Soit $\mathfrak{L} = (L_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une chaîne de réseaux dans F^2. On lui associe un sous-anneau unitaire $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\mathfrak{L}$ de $\mathrm{M}(2, F)$ de la façon suivante :

$$\mathfrak{A}_\mathfrak{L} = \{a \in \mathrm{M}(2, F) \ ; \ aL_k \subset L_k, \ k \in \mathbb{Z}\} \ .$$

Noter que les réseaux de $\mathfrak{L}$ sont naturellement des $\mathfrak{A}$-modules.

Si $\mathfrak{L}$ la chaîne standard donnée par $L_k = \mathfrak{p}^k \oplus \mathfrak{p}^k$, $k \in \mathbb{Z}$, un calcul facile donne :

$$\mathfrak{A}_\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ , \ a, b, c, d \in \mathfrak{o}\}.$$

Si $\mathfrak{L}$ est la chaîne standard de période 2 (cf. Proposition précédente), alors on montre de même que

$$\mathfrak{A}_\mathfrak{L} = \mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ ; \ a, b, d \in \mathfrak{o} \ , \ c \in \mathfrak{p} \ \} \ .$$

On remarque que les anneaux $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{I}$ sont en même temps des sous-anneaux unitaires de $\mathrm{M}(2, F)$ et des $\mathfrak{o}$-réseaux dans le F-espace vectoriel $\mathrm{M}(2, F)$, les structures de module et d'anneau étant compatible. On dit que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{I}$ sont des *ordres* de l'algèbre $\mathrm{M}(2, F)$

Remarquons que si $g \in G$, alors $\mathfrak{A}_{g\mathfrak{L}} = g\mathfrak{A}_\mathfrak{L}g^{-1}$. Donc comme corollaire de la proposition précédente, nous avons :

Corollaire. *Soit $\mathfrak{L}$ une chaîne de $\mathfrak{o}$-réseaux dans F^2.*
1) *Il existe $g \in G$ tel que*

$$g\mathfrak{A}_\mathfrak{L}g^{-1} = \begin{cases} \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} & \text{si} \quad e_\mathfrak{L} = 1 \\ \mathfrak{I} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} & \text{si} \quad e_\mathfrak{L} = 2 \end{cases}$$

2) *L'anneau* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$ *est un* $\mathfrak{o}$*-ordre de* $\mathrm{M}(2,F)$.

L'ordre $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$ est appelé un *ordre de chaîne*. Le résultat suivant montre que $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}$ détermine la chaîne $\mathfrak{L}$ de façon unique.

Proposition. *Soit* $\mathfrak{L}$ *une chaîne de réseaux dans* F^2 *et* L *un réseau de* F^2 *stable par* $\mathfrak{A}$. *Alors* $L\in\mathfrak{L}$.

Démonstration. Il suffit de démontrer le résultat pour les chaînes standard. Commençons par le cas $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}=\mathfrak{I}$. L'ordre $\mathfrak{I}$ contient les matrices idempotentes

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\ \text{et}\ e_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\ .$$

(Idempotentes au sens où $e_1.e_1=e_1$ et $e_2.e_2=e_2$.) De $\mathfrak{I}\ni I_2=e_1+e_2$, on tire $L=e_1L\oplus e_2L$. On voit facilement que e_iL est un sous-$\mathfrak{o}$-module compact de $F\oplus 0$. Il est donc de la forme $\mathfrak{p}^a$. De même $e_2L=0\oplus\mathfrak{p}^b$, pour un certain entier relatif b. En testant la stabilité de $\mathfrak{p}^a\oplus\mathfrak{p}^b$, on voit que forcément $a=b$, ou bien $a+1=b$. D'où le résultat. Le cas de l'ordre $\mathfrak{M}$ est similaire (mais plus facile).

Soit $\mathfrak{L}=(L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une chaîne de réseaux dans F^2. Pour tout $l\in\mathbb{Z}$, on pose

$$\mathfrak{P}_l=\{a\in\mathrm{M}(2,F)\ ;\ aL_k\subset L_{k+l}\}\ .$$

Proposition. 1) *Pour tous* l, $m\in\mathbb{Z}$, *on a*

$$\mathfrak{P}_l\mathfrak{P}_k\subset\mathfrak{P}_{l+k}\ .$$

2) *Pour* $l\geqslant 0$, *les* $\mathfrak{P}_l$ *sont des idéaux de* $\mathfrak{A}=\mathfrak{P}_0$.
3) *Il existe un élément* $\Pi=\Pi_{\mathfrak{L}}$ *de* G, *tel que* $\mathfrak{P}_l=\Pi_{\mathfrak{L}}^l\mathfrak{A}$, $l\in\mathbb{Z}$.

Démonstration. Les points 1) et 2) sont immédiats. Posons $\Pi=\varpi I_2$ pour l'ordre $\mathfrak{M}$ et $\Pi=\begin{pmatrix}0&1\\\varpi&0\end{pmatrix}$ pour l'ordre $\mathfrak{I}$. On vérifie aisément que dans les deux cas $\Pi L_k=L_{k+1}$, $k\in\mathbb{Z}$. On a donc :

$$\mathfrak{P}_l=\{a\in\mathrm{M}(2,F)\ ;\ aL_k\subset\Pi^lL_k\}=\Pi^l\mathfrak{P}_0\ .$$

Proposition. 1) *Si* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}=\mathfrak{M}$, *alors*

$$\mathfrak{P}_l=\begin{pmatrix}\mathfrak{p}^l&\mathfrak{p}^l\\\mathfrak{p}^l&\mathfrak{p}^l\end{pmatrix}\ .$$

Si $\mathfrak{A}_{\mathfrak{L}}=\mathfrak{I}$, *alors*

$$\mathfrak{P}_l=\begin{cases}\begin{pmatrix}\mathfrak{p}^m&\mathfrak{p}^m\\\mathfrak{p}^{m+1}&\mathfrak{p}^m\end{pmatrix} & si\quad l=2m\\ \begin{pmatrix}\mathfrak{p}^{m+1}&\mathfrak{p}^m\\\mathfrak{p}^{m+1}&\mathfrak{p}^{m+1}\end{pmatrix} & si\quad l=2m+1\end{cases}$$

2) *Pour toute chaîne de réseaux* $\mathfrak{L}$, *les* $\mathfrak{P}_l$, $k\in\mathbb{Z}$, *forment une suite décroissante d'*$\mathfrak{o}$*-réseaux de* $\mathrm{M}(2,F)$.

Démonstration. Le point 1) et un calcul direct. On en déduit immédiatement que 2) est vrai pour les réseaux standard. On obtient 2) en général en faisant agir le groupe G, en remarquant que pour toute chaîne $\mathcal{L}$, on a

$$g\mathfrak{P}_l(\mathcal{L})g^{-1} = \mathfrak{P}_l(g\mathcal{L}) \ , \ g \in G \ .$$

Si $\mathfrak{A}$ est un ordre de chaîne, on pose :

$$U^0(\mathfrak{A}) = U^0 = \mathfrak{A}^\times \ \text{ et } \ U^n(\mathfrak{A}) = 1 + \mathfrak{P}_n \ , \ n \geqslant 1 \ .$$

Proposition. 1) *Pour tout ordre de chaîne $\mathfrak{A}$ et tout entier $n \geqslant 1$, les ensembles $U^n(\mathfrak{A})$ sont des sous-groupes compacts et ouverts de G.*

1) *Pour tous $n > m \geqslant 0$, les quotients $U^m(\mathfrak{A})/U^n(\mathfrak{A})$ sont finis.*

Démonstration. 1) En faisant agir G par conjugaison (en remarquant que $U^n(g\mathfrak{A}g^{-1}) = gU^n(\mathfrak{A})g^{-1}$), il suffit de démontrer le résultat pour les ordres standard (la conjugaison est un homéomorphisme et transforme un sous-groupe en un sous-groupe).

Commençons par montrer que les $U^n(\mathfrak{A})$, $n \geqslant 1$ sont des sous-groupes. En effet si $1 + h \in U^n(\mathfrak{A})$, avec $h \in \mathfrak{P}_n$. Alors $h^k \in \mathfrak{P}_{hn}$, $k \geqslant 0$, de sorte que la série $\sum_{k \geqslant 0}(-1)^k h^k$ converge car son terme général tend vers 0. Sa limite est forcément dans $U^n(\mathfrak{A})$ car $\mathfrak{P}_n$ est fermé. Ceci fournit donc un inverse à $1 + h$. Il est clair que $U^n(\mathfrak{A})$ est stable par multiplication car si $1+h, 1+h' \in U^n(\mathfrak{A})$, on a $(1+h)(1+h') = 1+h+h'+hh' \in U^n(\mathfrak{A})$, puisque $\mathfrak{P}_n\mathfrak{P}_n \subset \mathfrak{P}_{2n} \subset \mathfrak{P}_n$. L'ouverture et la compacité viennent de ce que $\mathfrak{P}_n$ est lui-même compact ouvert puisque c'est un réseau. Le groupe $U^0(\mathfrak{A})$ est compact car c'est un fermé de $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{o})$. Il est ouvert car il contient $U^1(\mathfrak{A})$, voisinage ouvert de l'unité.

2) Si $m > n \geqslant 0$, U^n est un sous-groupe ouvert de U^m. Donc les classes à gauche de U^m modulo U^n sont aussi ouvertes puisque ce sont des translatés. Les classes à gauche forment donc un recouvrement ouvert du compact U^n par des sous-ensembles deux-à-deux disjoints. Elles sont donc en nombre fini.

A tout ordre de chaîne $\mathfrak{A}$, on attache un dernier groupe $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$, le normalisateur de $\mathfrak{A}$ dans G :

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{A}} = \{g \in G \ ; \ g\mathfrak{A}g^{-1} = \mathfrak{A}\} \ .$$

C'est un sous-groupe ouvert de G car il contient évidemment $U(\mathfrak{A})$, qui est ouvert. Il n'est pas compact car il contient l'ensemble $\{\varpi^k I_2 \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$, qui n'est pas borné.

Proposition. 1) *Soit $\mathfrak{A}$ un ordre de chaîne. Alors le groupe $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ est aussi formé des éléments de G qui stabilisent la chaîne $\mathcal{L}$:*

$$\mathcal{K}_{\mathfrak{A}} = \{g \in G \ ; \ gL \in \mathcal{L} \text{ pour tout } L \in \mathcal{L}\}.$$

2) *Si $\mathfrak{A}$ est un ordre de chaîne, $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ est le produit semidirect du groupe cyclique engendré par $\Pi_{\mathfrak{A}}$ et de $U(\mathfrak{A})$.*

Démonstration. 1) Soient $g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ et $L \in \mathcal{L}$. Alors $\mathfrak{A}(gL) = g[g^{-1}\mathfrak{A}g]L = g\mathfrak{A}L \subset gL$. Donc le réseau gL appartient à $\mathcal{L}$ puisqu'il est stable par $\mathfrak{A}$ (une proposition précédente).

Réciproquement, supposons que $g \in G$ stabilise l'ensemble L. Il existe une application strictement décroissante $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ telle que $gL_k = L_{f(k)}$. Par la propriété de périodicité, on a $f(k + e(\mathfrak{L})) = f(k) + e(\mathfrak{L})$. Il n'est alors pas difficile de se convaincre que f est une translation, disons de la forme $k \mapsto k + k_0$. On en déduit que l'élément $h = \Pi^{-k_0} g$ vérifie

$$hL_k = L_k \ , \ \ , ki \in \mathbb{Z} \ .$$

Mais un tel élément h est forcément dans $U(\mathfrak{A})$. En effet il est dans $\mathfrak{A}$ et son inverse aussi. Donc $g \in \Pi^{k_0} U(\mathfrak{A})$. Or un calcul direct montre que Π normalise $\mathfrak{A}$: $\Pi \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$. Ainsi $g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$.

2) Puisque Π normalise $\mathfrak{A}$, il normalise $U(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^\times$. De plus le groupe cyclique $\langle \Pi \rangle$ intersecte $U(\mathfrak{A})$ trivialement (Π^k agit par un décalage de k sur la chaîne $\mathfrak{L}$). On peut donc considérer le produit semi-direct $\langle \Pi \rangle U(\mathfrak{A})$. On a déjà vu l'inclusion $\langle \Pi \rangle U(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$. Prouvons l'autre inclusion. Si $g \in \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$, d'après le point 1) il agit par un certain décalage k_g sur la chaîne $\mathfrak{L}$, de sorte que $\Pi^{-k_g} g$ stabilise tous les réseaux de $\mathfrak{L}$. Puisqu'il en est de même de son inverse, on a $\Pi^{-k_g} g \in \mathfrak{A}$ et $(\Pi^{-k_g} g)^{-1} \in \mathfrak{A}$, de sorte que $\Pi^{-k_g} g \in \mathfrak{A} \in \mathfrak{A}^\times$. Le résultat en découle.

Proposition. *Soit* $\mathfrak{A}$ *un ordre de chaîne. alors l'image de* $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ *dans le quotient* $G/Z(G) = G/F^\times$ *est compact.*

Remarque. On dit aussi que $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ est compact modulo le centre.

Démonstration. Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}$, on a $\Pi = \varpi I_2 \in Z(G)$, de sorte que $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ et $U(\mathfrak{A})$ on même image dans le quotient. Le résultat découle alors de la compacité de $U(\mathfrak{A})$.

Si $\mathfrak{A} = \mathfrak{I}$, alors $\Pi^2 = \varpi I_2 \in Z(G)$. Alors l'image $\bar{U(\mathfrak{A})}$ est compacte et est un sous-groupe d'indice 2 de l'image $\bar{\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}}$. Donc ce dernier ensemble est compact car réunion des deux classes modulo $\bar{U(\mathfrak{A})}$ qui sont elles-mêmes compactes.

A.IV. L'arbre de $\mathrm{GL}(2, F)$ et applications.

L'objet de cette section est de construire un espace métrique sur lequel le groupe $G = \mathrm{GL}(2, F)$ agit par isométries. Nous en déduirons la listes des sous-groupes compacts maximaux de $G/Z(G)$.

Un *graphe non dirigé* Γ , ou plus brièvement un *graphe*, est la donnée d'un ensemble S de *sommets* et d'un sous-ensemble A de l'ensemble des parties à deux éléments de S formé des *arêtes*. Si $a = \{s_1, s_2\} \in A$ est une arête, les sommets s_1 et s_2 sont appelés les *extrémités* de a. Un sommet s est dit *voisin* d'un sommet t, si $\{s, t\}$ est une arête. La *valence* d'un sommet s de Γ est le nombre de sommets voisins de s. Un graphe est dit *uniforme* de valence v si chacun de ses sommets possède s voisins.

On dit qu'un groupe H agit sur un graphe Γ s'il agit sur son ensemble de sommet S en préservant les arêtes : si $\{s, t\}$ est un arête, alors $\{h.s, h.t\}$ est encore une arête, pour tout h dans H.

Soit $n > 0$ un entier. Un *chemin (géodésique) de longueur* n dans un graphe Γ est une suite **injective** de sommets $(s_i)_{i=0,...,n}$ telle que pour tout $i = 0, ..., n-1$, $\{s_i, s_{i+1}\}$

est une arête. Un *circuit* dans Γ est un chemin $(s_i)_{i=0,\dots,n}$ tel que $s_0 = s_i$. Un graphe est *connexe* si deux sommets sont toujours reliés par un chemin.

Un *arbre* est un graphe connexe qui ne contient pas de circuit.

L'espace métrique que nous allons associer à G sera un arbre uniforme de valence $q+1$ (rappelons que $q = |\mathbf{k}|$).

Deux réseaux L et M de F^2 sont dits *homothétiques* s'il existe un scalaire $x \in F^\times$ tel que $xL = M$. C'est une relation d'équivalence. La classe de M (classe *d'homothétie de réseaux*) est notée $[M]$. Le groupe G agit sur les classes d'homothétie pas $g.[M] = [gM]$.

Deux classes de réseaux $[L]$ et $[M]$ sont dites *proches* si, quitte à changer les représentants L et M, on a les inclusions strictes $L \supset M \supset \varpi L$. Cette relation est symétrique car si $L \supset M \supset \varpi L$, on a aussi $\varpi^{-1}M \supset L \supset \varpi(\varpi^{-1}L)$. Notons que l'action de G sur les classes de réseaux préserve la proximité.

On définit un graphe X de la façon suivante. Ses sommets sont les classes d'homothétie de réseaux, et deux classes définissent une arête si, et seulement si, elles sont proches. Il est clair que le groupe G agit sur X.

Proposition. *Le graphe X est uniforme de valence $q+1$.*

Démonstration. Soit $[L]$ un sommet de X. Par définition une classe $[M]$ est voisine de $[L]$ si, quitte à translater M, par un élément de $F^\times$, on a $L \supset M \supset \varpi L$. En considérant l'image $\bar{M}$ de M dans le quotient $L/\varpi L$, on obtient une bijection entre les sommets voisins de $[L]$ et les droites vectorielles du plan vectoriel sur $\mathbf{k}$ donné par $L/\varpi L$. Puisqu'il y a $q+1$ telles droites vectorielles, le résultat en découle.

Théorème. *Le graphe X est un arbre.*

Remarque. On l'appelle l'*arbre de Bruhat-Tits* de G.

Démonstration. Montrons d'abord que X est connexe. Soit $[L]$ et $[M]$ deux sommets. On peut d'abord changer le représentant M de sorte que $M \subset L$. On sait ensuite qu'il existe une base (e_1, e_2) de F^2 et des entiers relatifs a et b tels que

$$L = \mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{o}e_2 \text{ et } M = \mathfrak{o}\varpi^a e_1 \oplus \mathfrak{o}\varpi^b e_2 \ .$$

Par hypothèse, on a forcément $a, b \geqslant 0$. Posons

$$L_i = \mathfrak{o}\varpi^i e_1 \oplus \mathfrak{o}e_2,\ M_j = \mathfrak{o}\varpi^a e_1 \oplus \mathfrak{o}\varpi^j e_2\ ,\ i,j \in \mathbb{Z}\ .$$

Alors la suite $[L] = [L_0]$, $[L_1]$, ..., $[L_a]$, $[M_1]$, $[M_2]$, ..., $[M_b] = [M]$ est un chemin reliant $[L]$ à $[M]$.

Nous montrons ensuite le lemme suivant.

Lemme. *Soit $([L_i])_{i=0,\dots,n}$ un chemin dans X. Il existe une base (e_1, e_2) de F^2 telle que, quitte à changer les représentants des classes, on ait $L_i = \mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{o}\varpi^i e_2$, $i = 0, \dots, n$.*

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$ le résultat est trivial (pour $n = 2$, il est facile). Soit $([L_i])_{i=0,...,n+1}$ un chemin dans X. Par hypothèse de récurrence, quitte à changer les représentants, il existe une base (f_1, f_2) de F^2 telle que

$$L_i = \mathfrak{o}f_1 \oplus \mathfrak{o}\varpi^i f_2 \ , \ i = 0, ..., n \ .$$

Quitte à translater le problème par un élément de G (qui respecte la structure de graphe), on peut en plus supposer que (f_1, f_2) est la base canonique. Pour $i = 0, ..., n$, le stabilisateur de L_i est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^i \end{pmatrix} \mathrm{GL}(2, \mathfrak{o}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{-i} \end{pmatrix} = \{g \in \begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \varpi^{-i}\mathfrak{o} \\ \varpi^i\mathfrak{o} & \mathfrak{o} \end{pmatrix} \ , \ \mathrm{Det}(g) \in \mathfrak{o}^\times\} \ .$$

Un élément du stabilisateur de L_i transforme une base de L_i (comme $\mathfrak{o}$-module) en un autre base.

Choisissons le représentant L_{n+1} de sorte que $L_n \supset L_{n+1} \supset \varpi L_{n+1}$. Puisque $[L_{n+1}] \neq [L_{n-1}]$, on doit avoir $L_{n+1} \neq \mathfrak{o}\varpi f_1 \oplus \mathfrak{o}\varpi^n f_2$. En d'autres termes, le quotient $\bar{L}_{n+1}$ de L_{n+1} dans $L_n/\varpi L_{n+1}$ doit être différent de la droite vectorielle $\mathbf{k}\bar{\varpi^n} f_2$. Il est facile de voir que dans le stabilisateur de L_n, le sous-groupe

$$\bar{U}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^n & 1 \end{pmatrix}$$

agit transitivement sur les droites vectorielles de L_n/L_{n+1} différentes de $\mathbf{k}\bar{\varpi^n} f_2$. Soit g dans ce sous-groupe tel que $g\mathbf{k}\bar{f_1} = L_n/L_{n+1}$. Cet élément stabilise tous les réseaux L_0, ..., L_n. Remplaçons alors la base (f_1, f_2) par la base $(e_1, e_2) = (gf_1, gf_2)$. Alors pour $i = 0, ..., n$, $(gf_1, g(\varpi^i f_2) = (gf_1, \varpi^i gf_2)$ est une $\mathfrak{o}$-base de L_i, et, par construction $L_{n+1} = \mathfrak{o}gf_1 \oplus \varpi^{n+1} gf_2$. D'où le résultat à l'ordre $n + 1$.

Exercice. (A faire pour éclairer la démonstration précédente.) *Soit K un corps (commutatif). Montrer que l'ensemble des éléments de $\mathbb{P}^1(K)$ différents de la droite $K.(1, 0)$ forment une seule orbite sous le groupe des matrices triangulaires inférieures.*

Reprenons la démonstration du Théorème. Il suffit de montrer que pour tout chemin $(L_i)_{i=0,...,n}$, on a $[L_n] \neq [L_0]$. Par le lemme précédente, il existe une base (e_1, e_2) de F^2 telle que $L_i = \mathfrak{o}e_i \oplus \mathfrak{p}^i e_2$. Or si $n > 0$, les réseaux $\mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{o}e_2$ et $\mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{p}^n e_2$ ne peuvent être homothétiques. CQFD.

On complète à présent l'arbre combinatoire X en un véritable arbre en rajoutant un segment $[s, t]$ pour toute paire de sommets voisins $\{s, t\}$. Pour ce faire on considère l'ensemble $|X|$ obtenu de X en rajoutant tous les symboles $rs+(1-r)t$, où (s, t) parcourt les couples de sommets voisins et r l'intervalle $]0, 1[$. On convient d'identifier $rs+(1-r)t$ et $(1 - r)t + rs$. Un sommet s pourra aussi s'écrire symboliquement $1.s + 0.t$ pour tout sommet voisin t. Si s et t sont deux sommets voisins, l'ensemble $\{rs+(1-r)t \ ; \ r \in [0, 1]\}$ s'appelle le segment d'extrêmités s et t et se note $[s, t]$.

On introduit une distance d sur $|X|$ de la façon suivante. Soit s et t deux sommets quelconques de X. Soit $(s_i)_{i=0,...,n}$, $n \geqslant 2$, un chemin tel que $s \in [s_0, s_1]$ et $t \in [s_{n-1}, s_n]$. Ecrivons $s = \alpha s_0 + (1 - \alpha)s_1$ et $t = \beta s_{n-1} + (1 - \beta)s_n$, α, $\beta \in [0, 1]$. On pose alors :

$$d(s, t) = \alpha + (n - 2) + (1 - \beta) \ .$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien d'une distance. Nous admettrons (le démontrer en exercice) que l'*espace métrique* $|X|$ *est localement compact.*

On prolonge l'action du groupe G à $|X|$ de la façon suivante. Si un point p est sur l'arête $[s,t]$: $p = \alpha s + (1-\alpha)t$, $\alpha \in [0,1]$, on pose $g.x = \alpha g.s + (1-\alpha)g.t$. Il est à peu près clair que l'action de G préserve la distance : *le groupe* G *agit sur* $|X|$ *par des isométries.*

Nous allons démontrer, dans le cadre de l'arbre $|X|$, un théorème très général valant pour les espaces métriques ayant la propriété CAT(0) (lire par exemple [AB] chap. 11, pages 549–564).

Commençons par donner deux définitions. Etant donné deux points s et t deux $|X|$, on peut trouver un chemin géodésique qui les contient tous les deux. Il existe alors un unique point m de ce chemin tel que $d(s,m) = d(m,t)$. On le note $m[s,t]$, et on l'appelle *le milieu du segment* $[s,t]$. Il est clair que si $g \in G$, on a $m[g.s, g.t] = g.m[s,t]$. Une partie C de $|X|$ est dite *convexe* si à chaque fois qu'elle contient deux points, elle contient le segment géodésique qui les relie.

Théorème (Bruhat-Tits). *Soit* $\mathcal{B}$ *une partie bornée et convexe de* $|X|$. *Alors le stabilisateur global* H *de* $\mathcal{B}$ *dans le groupe des isométries de* $|X|$ *possède un point fixe dans l'adhérence de* $\mathcal{B}$.

La démonstration du Théorème est basée sur la propriété suivante, dite de *courbure négative* ou CAT(0).

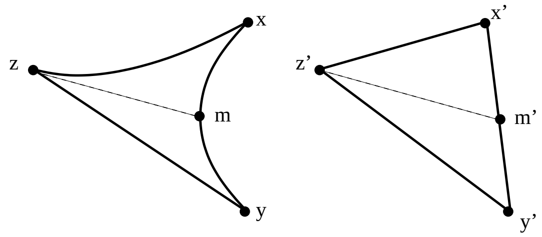
Lemme. *Soient* x, y, z *trois points de* $|X|$ *et* m *le milieu du segment* $[x,y]$. *Alors on a l'inégalité :*

$$d(x,z)^2 + d(y,z)^2 \geqslant 2d(m,z)^2 + \frac{1}{2}d(x,y)^2 \ .$$

Remarque. Puisqu'on a l'inégalité triangulaire $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$, il existe un triangle (peut être plat) $x'y'z'$ dans le plan euclidien standard tel que

$$d(x,y) = d(x',y') \ , \ d(x,z) = d(x',z') \ , \ d(y,z) = d(y',z') \ ;$$

Soit m' le milieu de $[x'y']$ dans le plan euclidien. Alors (**le faire en exercice**) l'inégalité du Lemme est équivalent à $d(z,m) \leqslant d(z',m')$. De façon imagée, l'espace $|X|$ est *courbé négativement* (comme un hyperboloïde, et contrairement au plan euclidien, qui est plat, ou à la sphère qui est courbée positivement).



Démonstration du Lemme. Elle se fait par des calculs immédiats, au cas par cas, selon que le point du segment $[x, y]$ le plus proche de z est :

– le point x,
– le point y,
– se trouve sur le segment $]x, m]$,
– se trouve sur le segment $[m, y]$.

Les détails sont laissés en exercice.

Démonstration du Théorème. Soit $0 < k < 1$ un réel fixé une fois pour toute. Si P est une partie de $\mathcal{B}$, on définit $f(P)$ comme étant l'ensemble des milieux $m[x, y]$ pour des points x, y de P tels que $d(x, y) \geqslant k\text{Diam }(P)$, où Diam (P) désigne le diamètre de la partie bornée P :

$$\text{Diam }(P) = \text{Sup}\{d(x, y)\ ;\ x, y \in P\}\ .$$

Plus généralement si P, Q sont des parties de $\mathcal{B}$, on note Diam (P, Q) la borne supérieure :

$$\text{Sup}\{d(x, y)\ ;\ x \in P \text{ et } y \in Q\}\ .$$

Notons que si P est stable par H, il en est de même de $f(P)$.

Soit P une partie de $\mathcal{B}$. Alors pour $x, y \in P$ et $z \in \mathcal{B}$, on a :

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} d(m, z) &\leqslant \tfrac{1}{2}(d(x, z)^2 + d(y, z)^2) - \tfrac{1}{4}d(x, y)^2 \\ &\leqslant \text{Diam }(X, \{z\}) - \tfrac{k^2}{4}(\text{Diam }(X))^2\ . \end{aligned}$$

En faisant varier z dans P, on obtient :

$$\text{(b)} \qquad \text{Diam }(f(P), P) \leqslant k_1\text{Diam }(P) \text{ avec } k_1 = \sqrt{1 - k^2/4} \in]0, 1[\ .$$

En faisant varier z dans $f(P)$ dans l'inéquation (a), et en se servant de (b), on obtient :

$$\text{(c)} \qquad \text{Diam } f(P) \leqslant k_2\text{Diam }(X) \text{ où } k_2 = \sqrt{1 - k^2/2} \in]0, 1[\ .$$

Donc par récurrence, pour tout entier $q \geqslant 1$, on a :

$$\text{(d)} \qquad \text{Diam } f^q(P) \geqslant k_2^q\text{Diam }(P)\ .$$

Pour tout $q \geqslant 1$, choisissons un point p_q dans $f^q(\mathcal{B})$. Il resulte de (b) et (d) que $d(p_q, p_{q+1}) \leqslant k_1 k_2^q\text{Diam }(\mathcal{B})$. Donc la suite (p_q) est de Cauchy est converge vers un point p de l'adhérence de $\mathcal{B}$. Puisque le diamètre de $f^q(\mathcal{B})$ tend vers 0, ce point p est indépendant du choix des p_q. Or le groupe H stabilise chacun des ensembles $f^q(\mathcal{B})$. Il fixe donc p. CQFD.

Remarque. Bien remarquer que, dans la démonstration, la suite $\mathcal{B}_i$, $i \geqslant 0$, n'a aucune raison d'être décroissante.

Remarquons que le centre $Z(G) = F^\times I_2$ agit trivialement sur l'arbre $|X|$, de sorte qu'on a une action du quotient $\text{PGL}(2, F)$. Comme application du théorème du point fixe de Bruhat-Tits, on a le résultat suivant.

Théorème. 1) *Tout sous-groupe compact modulo le centre de* $\text{GL}(2, F)$ *fixe un point de* $|X|$*, que l'on peut choisir comme étant un sommet ou le milieu d'une arête.*

2) *Soit* $\mathcal{K}$ *un sous-groupe compact modulo le centre de* G *et maximal pour cette propriété. Alors* $\mathcal{K}$ *est le normalicateur* $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ *d'un ordre de chaîne* $\mathfrak{A}$ *dans l'algèbre* $\mathrm{M}(2, F)$.

Démonstration. Soit H un sous-groupe compact modulo le centre de G et $\bar{H}$ son image dans $\mathrm{PGL}(2, F)$. Soit $s_0 = [\mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}]$ le sommet *standard* de X. Son stabilisateur dans G est $\tilde{K} = F \times \mathrm{GL}(2, \mathfrak{o})$ et son image $\bar{K}$ dans $\mathrm{PGL}(2, F)$ est compacte. L'ensemble de points $\bar{H}.s_0 = \{h.s_0 \ ; \ h \in \bar{H}\}$ est fini. En effet, le quotient $\bar{H}/(\bar{H} \cap \bar{K})$ est fini car $\bar{H} \cap \bar{K}$ est un sous-groupe ouvert du compact $\bar{H}$. Donc si h_1, ..., h_n est un système de représentants de ce quotient, on a $\bar{H}.s_0 = \{h_i.s_0 \ ; \ i = 1, ..., n\}$. Soit $\mathcal{B}$ le plus petit convexe de $|X|$ contenant cet ensemble fini de points. C'est un arbre compact et il est stable par H (ce groupe permute les convexes contenant $\bar{H}.s_0$). Par le Théorème de Bruhat-Tits, il existe un point p de $\mathcal{B}$ fixe par toutes les isométries stabilisant $\mathcal{B}$ globalement. En particulier ce point est fixe par H. Ecrivons le $\alpha s + (1-\alpha)t$, $\alpha \in [0, 1]$, ou $\{s, t\}$ est une arête. Si $\alpha = 0, 1$, alors p est un sommet. Sinon soit $h \in H$. Alors $g.p = \alpha g.s + (1-\alpha)g.t = p = \alpha + (1-\alpha)t$. Or $[s, t]$ est l'unique arête de X contenant p. Donc h stabilise l'ensemble$\{s, t\}$, donc le milieu du segment $[s, t]$. D'ou l'assertion 1).

On a vu que les normalisateurs d'ordres de chaîne sont compacts modulo le centre. Il suffit donc de démontrer qu'un sous-groupe compact modulo le centre H de G est contenu dans le normalisateur d'un ordre de chaîne. On utilise 1). Si H fixe un sommet $s = [L]$, alors il normalise l'ordre associé à la chaîne de réseaux $\mathcal{L} = \{\varpi^k L \ ; \ k \in \mathbb{Z}\}$.S'il fixe le milieu d'une arête $\{[L], [M]\}$, alors on peut trouver une base (e_1, e_2) de F^2 telle que, quitte à changer les représentants, on ait $L = \mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{o}e_2$ et $M = \mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{p}e_2$. Alors $\mathcal{L} = \{\varpi^k L, \ \varpi^l M \ ; \ k, l \in \mathbb{Z}$ est une chaîne de réseaux et H normalise l'ordre associé.

Pour compléter ce résultat, nous terminons cette section par le théorème suivant.

Théorème. *Les sous-groupes compacts maximaux de* G *sont les conjugués du sous-groupe* $K = \mathrm{GL}(2, \mathfrak{o})$.

On commence par montrer le :

Lemme. *Une somme finie de réseaux de* F^2 *est un réseau de* F^2.

Démonstration du Lemme. Par récurrence sur le nombre de réseaux, observant que pour un seul réseau le résultat est trivial, on est ramener à prouver le résultat pour deux réseaux. Mais si L et M sont des réseaux, il existe une base (e_1, e_2) de F^2 et des entiers relatifs a et b tels que $L = \mathfrak{o}e_1 \oplus \mathfrak{o}e_2$ et $M = \mathfrak{p}^a e_1 \oplus \mathfrak{p}^b e_2$. Alors immédiatement

$$L + M = \mathfrak{p}^{\mathrm{Min}(0,a)} e_1 \oplus \mathfrak{p}^{\mathrm{Min}(0,b)} e_2 \ .$$

Démonstration du Théorème. On a vu que K est compact. Ses conjugués le sont aussi. Soit H un autre sous-groupe compact. Soit $L_0 = \mathfrak{o} \oplus \mathfrak{o}$ le réseau standard, de stabilisateur$K$. Alors $H/(K \cap H)$ étant fini, la somme

$$L = \sum_{h \in H} h.L_0$$

est un réseau puisqu'elle est finie. Ce réseau est clairement fixé par H. Si $L = gL_0$, pour un $g \in G$, alors $H \subset \mathrm{StabL} = gKg^{-1}$. CQFD.

B. Représentations lisses du groupe G

Ce chapitre correspond au chapitre 1.2 de BH

Les définitions et résultats introduits ici valent pour des groupes très généraux. Nous ne nous restreindrons pas au cas du groupe $\mathrm{GL}(2, F)$, mais nous supposerons plus généralement que notre groupe G est un groupe topologique vérifiant la propriété suivante :

Hypothèse. *Tout voisinage de l'identité dans G contient un sous-groupe compact et ouvert.*

On dit que le groupe G est *localement profini*. Des exemples sont :

– un sous-groupe fermé d'un groupe lui-même localement profini (par exemple un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(2, F)$).
– le quotient d'un groupe localement profini par un sous-groupe normal et fermé (par exemple $\mathrm{PGL}(2, F)$).

Dans ce cours, nous ne considérons que des représentations de G dans des espaces vectoriels complexes. Une telle représentation est un homomorphisme $\pi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V)$ de G dans le groupe des automorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V. Une telle représentation est notée (π, V). Pour $g \in G$ et $v \in V$, on écrira souvent $g.v$ au lieu de $\pi(g).v$, lorsque aucune confusion n'est à craindre. On ne mettra aucune topologie sur l'espace V. Les notions de sous-représentation, représentation quotient, représentation irréductible sont les mêmes que dans le cas d'un groupe fini.

Une représentation (π, V) de G est dite *lisse* si tout vecteur v de V a un stabilisateur ouvert dans G :

$$\mathrm{Stab}_G(v) = G_v = \{g \in G \ ; \ \pi(g).v = v\}$$

est un sous-groupe ouvert de G. Il est clair qu'un sous-représentation d'une représentation lisse est lisse, de même qu'un quotient d'une représentation lisse. Un vecteur d'une représentation (pas forcément lisse) est dit *lisse* si sont stabilisateur dans G est ouvert.

Si (π_i, V_i), $i = 1, 2$, sont deux représentations lisses de G, un opérateur d'entrelacement φ entre (π_1, V_1) et (π_2, V_2) est un application linéaire $\varphi \ : V_1 \longrightarrow V_2$ telle que $\varphi(\pi_1(g).v) = \pi_2(g).\varphi(v)$, pour tous $g \in G$ et $v \in V$. On dit aussi que φ est un *homomorphisme* de représentations, ou encore que c'est une application (linéaire) G-*équivariante* entre les espaces V_1 et V_2. On note $\mathrm{Hom}_F(\pi_1, \pi_2)$ (ou parfois $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$) le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de ces homomorphismes. On dit que deux représentations (π_i, V_i), $i = 1, 2$, sont *isomorphes*, ou *équivalentes*, si $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ contient une application linéaire bijective.

Exemple 1. Une droite vectorielle D étant donnée, une représentation (de dimension 1) de G dans D est la même chose qu'un homomorphisme de groupe $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$. Un tel homomorphisme s'appelle un *charactère* de G. Le groupe G agit par $g.v = \chi(g)v$, $g \in G$,

$v \in D$. Le stabilisateur d'un vecteur non nul étant égal au noyau de χ, on voit que la représentation est lisse si et seulement si Ker χ est ouvert. On dit que le caractère est lisse. Par exemple un caractère χ de $F^\times$ est lisse si et seulement si son noyau contient $U_F^i = 1 + \mathfrak{p}^i$, pour i assez grand. Autrement dit, il provient d'un caractère d'un quotient $F^\times / U_F^i$, pour i assez grand. Un caractère χ de $F^\times$ est dit *non ramifié* si son quotient contient $U_F = \mathfrak{o}^\times$. Il est entièrement caractérisé par la valeur $\alpha = \chi(\varpi_F) \in \mathbb{C}^\times$, pour une uniformisante fixée ϖ. Effectivement :

$$\chi(x) = \alpha^{v_F(x)} \ , \ x \in F^\times \ .$$

Exemple 2. On peut montrer que les caractères de $G = \mathrm{GL}(2, F)$ sont tous de la forme $\chi(g) = \chi_F(\mathrm{Det}(g))$, où χ_F est un caractère de $F^\times$.

Exercice. *Prouver cette assertion. On pourra utiliser le fait que les matrices unipotentes supérieures et inférieures engendrent* $\mathrm{SL}(2, F)$ *et qu'un caractère de G est trivial sur les sous-groupes unipotents (supérieur et inférieur).*

Un caractère de la forme $\chi_F \circ \mathrm{Det}$ est lisse si et seulement si le caractère χ_F est lisse. En effet les $K_i = I_2 + \varpi^i \mathrm{M}(2, \mathfrak{o})$, $i > 0$ forment un système fondamental de voisinages ouverts de l'unité et on vérifie sans peine que $\mathrm{Det}(K_i) = U_F^i$, $i > 0$ (c'est vrai aussi pour $i = 0$).

Exemple 3. *Si le groupe G est compact alors toute représentation lisse irréductible est de dimension finie.* En effet, soit (π, V) un telle représentation et $v \in V$ un vecteur non nul. Puisque V est irréductible elle est engendrée par l'ensemble $\{g.v \ ; \ g \in G\}$. Or cet ensemble est fini. En effet par hypothèse le vecteur v est fixé par un sous groupe compact ouvert K. Le quotient G/K est fini et l'ensemble en question est $\{g_i.v \ ; \ i \in I\}$, où $\{g_i \ ; \ i \in I\}$ est un système de représentants de G/K.

De plus si (π, V) est irréductible et si $(v_1, ..., v_d)$ est une base de V, alors

$$K = \cap_{i=1,\dots,d} \mathrm{Stab}_G(v_i)$$

est un sous-groupe ouvert contenu dans le noyau de π. Donc le noyau de π est ouvert et π provient d'une représentation irréductible du groupe *fini* $G/\mathrm{Ker}\ \pi$.

Exemple 4. Considérons l'espace topologique G/B, où $G = \mathrm{GL}(2, F)$ et où B est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures. Cet espace est compact et totalement discontinu. Soit V l'ensemble des fonctions de G/B à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont localement constantes (si elles prennent une valeur z en un point, elle prenne une valeur constante égale à z dans un voisinage de ce point). Une telle fonction f est construite de la façon suivante. On se donne un entier $p > 0$, une partition de G/B en p ouverts $U_1 \coprod U_2 \cdots \coprod U_p$, p nombres complexes z_1, ..., z_p. La fonction est alors donnée par

$$f(x) = z_i \text{ si et seulement si } x \in U_i \ .$$

On fait agir le groupe G sur l'espace V par :

$$[\pi(g)f](x) = f(g^{-1}x) \ , \ f \in V \ , \ g \in G \ , \ x \in G/B \ .$$

Rappelons que G agit sur G/B par translation à gauche.

Nous obtenons une représentation *lisse*. En effet donnons-nous une fonction $f \in V$ par

$$f = \sum_{i \in I} z_i \mathbf{1}_{U_i}$$

comme ci-dessus (ici $\mathbf{I}$ désigne une fonction caractéristique). Pour montrer que le stabilisateur de f dans G est ouvert, il suffit de montrer qu'il existe un sous-groupe ouvert H de G qui stabilise tous les U_i par l'action à gauche de translation. Or ceci découle d'un argument de compacité. Soient $i \in I$ et $x \in U_i$. En écrivant la continuité de l'action $G \times G/B \longrightarrow G/B$ au point (e_G, x), on voit qu'il existe un sous groupe de congruence K_{n_x} et un voisinage ouvert $x \in W_x \subset U_i$ tels que $K_{n_x} W_x \subset U_i$. L'ouvert U_i étant compact, du recouvrement $U_i = \cup_{x \in U_i} W_x$, on peut extraire un recouvrement fini $U_i = \cup_{j \in J} W_{x_j}$. Posons $H_i = \cap_{j \in J} K_{n_{x_j}}$. Alors $H_i U_i = H_i \cup_{j \in J} W_{x_j} = \cup_{j \in J} H_i W_{x_j} \subset U_i$. Il s'ensuit que le sous-groupe ouvert $H = \cap_{i \in I} H_i$ stabilise tous les U_i. CQFD.

Soit V_0 le sous-espaces de V formé des fonctions constantes. C'est un sous-espace invariant par G. On obtient donc une représentation de G dans le quotient V/V_0. C'est représentation s'appelle la *représentation de Steinberg* et se note $\mathbf{St}_G$. Nous verrons plus tard qu'elle est irréductible.

Exercice. *Montrer que la représentation de Steinberg est de dimension infinie.*

Exemple 5. Soit X l'arbre de $G = \mathrm{GL}(2, F)$. On appelle *arête orientée* de X un couple (ordonné) (s, t) de sommets adjacents. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des arêtes orientées. Le groupe G agit naturellement sur $\mathcal{A}$ et sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ des fonctions complexes sur $\mathcal{A}$. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ formé des fonctions f qui vérifient :

(a) le support de f est fini,

(b) pour toute arête orientée (s, t), on a $f(t, s) = -f(s, t)$,

(c) pour tout sommet s, on a

$$\sum_{i=1,\dots,q+1} f(s, t_i) = 0 \ .$$

Ici q désigne le cardinal du corps résiduel et t_i, $i = 1, ..., q+1$, sont les sommets de X voisins de s.

On dit que les élément de V sont les fonctions harmoniques sur (les arêtes de) X à support fini. Puisque G respecte la structure de graphe de X, il stabilise l'espace V. On obtient ainsi uen représentation qui est lisse car le stabilisateur d'un ensemble fini de sommets est ouvert. *On montre, mais ça n'est pas trivial, que cette représentation est isomorphe à la représentation de Steinberg.*

Soit V une représentation lisse d'un groupe localement profini K. Nous admettrons sans démonstration (cf. [BH] (2.2), page 14) que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(SS1) V est la somme de ses sous-représentations irréductibles.

(SS2) V est la somme directe d'une famille de sous-représentations irréductibles.

(SS3) Tout sous-espace de V invariant par G possède un supplémentaire invariant par G.

Une représentation V vérifiant ces conditions est dite *semisimple.*

Proposition. ([BH] Lemma (2.2)) *Toute représentation lisse (de dimension finie ou infinie) d'un groupe compact localement profini est semisimple.*

En particulier si G est localement profini et $K \subset G$ est un sous-groupe compact, la restriction d'une représentation lisse de G à K est semi-simple.

Soient K un groupe compact localement profini. On note $\hat{K}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de K. En pratique, on se donne une classe par un représentant : si ρ est une représentation irréductible de K, la phrase "soit $\rho \in \hat{K}$" signifie en fait "considérons la classe d'équivalence de ρ dans $\hat{K}$.

Si $\rho \in \hat{K}$ et V est une représentation lisse de K, on note V^ρ la somme de toutes les sous-représentations irréductibles de V isomorphes à ρ. C'est une sous-représentation de V appelée la *composante ρ-isotypique* de V. Pour la représentation triviale $\mathbf{1}_K$, on utilise la notation $V^{\mathbf{1}_K} = V^K$. C'est aussi l'espace des vecteurs de V fixés par K.

Proposition ([BH](2.3), page 15). *Soient (π, V) une représentation lisse de G et K un sous-groupe compact ouvert de G.*

(a) *L'espace V est somme de ses composantes K-isotypiques :*

$$V = \bigoplus_{\rho \in \hat{K}} V^\rho \ .$$

(b) *Soit (σ, W) une autre représentation lisse de G et $f : V \longrightarrow W$ un opérateur d'entrelacement. Alors, on a*

$$f(V^\rho) \subset W^\rho \ \textit{et}\ W^\rho \cap f(V) = f(V^\rho) \quad \textit{pour tout}\ \rho \in \hat{K}\ .$$

Une représentation lisse de G est dite *admissible* si pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, l'espace des vecteurs fixes V^K est de dimension finie.

Proposition. *Soit V une représentation lisse de $G = \mathrm{GL}(2, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) *V est admissible.*
(b) *Pour tout $n \geqslant 0$, V^{K_n} est de dimension finie.*
(c) *Pour tout $\rho \in \widehat{K_0}$, V^ρ est de dimension finie.*

Preuve. Il est clair que (a) entraîne (b). Supposons que V vérifie (b) et soit $\rho \in \widehat{K_0}$. Alors on sait que $\mathrm{Ker}\,\rho$ est un sous-groupe ouvert de K_0. Soit n assez grand pour que $K_n \subset \mathrm{Ker}\,\rho$. Alors

$$V^\rho \subset V^{\mathrm{Ker}\,\rho} \subset V^{K_n} \ ,$$

et V^ρ est donc de dimension finie. Supposons (c). Soit K un sous-groupe compact ouvert de G. Il faut montrer que V^K est de dimension finie. En prenant n assez grand, on a $K_n \subset K$ et $V^K \subset V^{K_n}$. On est donc ramené à montrer que V^{K_n} est de dimension fini. Puisque K_n est normal dans K, le sous-espace V^{K_n} est stable par K (l'écrire). Décomposons V^{K_n} en composante K-isotypiques :

$$V^{K_n} = \sum_{i=1,...,r} (V^{K_n})^{\rho_i}$$

où les ρ_i sont les représentations irréductibles de K (à équivalence près) qui interviennent dans V^{K_n}. Il n'y en a qu'un nombre fini puisque V^{K_n} est une représentation du groupe fini K/K_n. On obtient donc

$$\mathrm{Dim}\, V^{K_n} = \sum_{i=1,...,r} \mathrm{Dim}\, (V^{K_n})^{\rho_i} \leq \sum_{i=1,...,r} \mathrm{Dim}\, V^{\rho_i} \leq \infty \ .$$

D'où le résultat.

Lemme. ([BH], Cor. 1 page 16) 1) *Soit U, V, W trois représentations lisses de G localement profini. Une suite de G modules*

$$U \longrightarrow V \longrightarrow W$$

est exacte si et seulement si pour tout sous-groupe compact ouvert K de G la suite induite

$$U^K \longrightarrow V^K \longrightarrow W^K$$

est exacte.

2) *Une sous-représentation (resp. une représentation quotient) d'une représentation admissible est admissible.*

Soit (π, V) une représentation d'un groupe localement profini *compact* K. L'espace des vecteurs fixes V^K est une sous-représentation de V. Nous allons construire un élément p de $\mathrm{Hom}_K\,(V, V^K)$ qui sera un projecteur d'image V^K. Soit $v \in V$ et K_0 un sous-groupe ouvert (donc compact) de K qui fixe v. Soit $\{h_i \ ; \ i = 1, ..., r\}$, $r = [K : K_0]$, un système de représentants de K/K_0. Alors l'expression

$$p(v) = \frac{1}{[K : K_0]} \sum_{i=1,...,r} \pi(h_i)v$$

ne dépend ni du système de représentants, ni du choix du sous-groupe ouvert K_0 qui fixe v (**exercice !**). On obtient ainsi une application $p : V \longrightarrow V$. Cette application est linéaire (il suffit, pour deux vecteurs, de choisir un sous-groupe K_0 qui les fixe simultanément). Si $\{h_i \ ; \ i = 1, ..., r\}$ est un système de représentants de $[K : K_0]$ et $h \in K$, il en est de même de $\{hh_i \ ; \ i = 1, ..., r\}$, pour tout h dans K. On en déduit donc que $p(v) \in V^K$ en applicant $\pi(h)$ à l'expression donnant p. Aussi, il est clair que $p(v)$ est l'identité sur V^K. Il s'ensuit que p est un projecteur d'image V^K.

Lemme. 1) *Le projecteur $p : V \longrightarrow V^K$ est K-équivariant.*

2) *Le noyau de p est la sous-représentation $V(K)$ donnée par*

$$V(K) = \mathrm{Vect}\, \{v - \pi(h).v \ ; \ v \in V, \ h \in K \ .$$

En particulier on a $V = V^K \oplus V(K)$.

Preuve. Soit $v \in V$ fixé par K_0 sous-groupe ouvert normal de K et soit $h \in K$. On a

$$\pi(h)p(v) = \frac{1}{[K : K_0]} \sum_{i=1,\ldots,r} \pi(hh_ih^{-1})\pi(h)v$$

les hh_ih^{-1} formant bien un système de représentant de $K/(hK_0h^{-1})$, et hK_0h^{-1} fixant bien $\pi(h)v$. Donc p est K-équivariant.

On a d'abord que $V(K)$ est dans le noyau de p : si $v \in V$, $h \in K$, $p(v - \pi(h)v = v - \pi(h)p(v) = v - v = 0$. Réciproquement un élément du noyau de p est de la forme $v - p(v)$, pour un $v \in V$. Si K_0 sous-groupe ouvert de K fixe v, on a alors

$$v - p(v) = v - \frac{1}{[K : K_0]} \sum_i \pi(h_i)v = \frac{1}{[K : K_0]} \sum_i (v - \pi(h_i)v) \in V(K) \ .$$

Exemple. La représentation de Steinberg de $G = \mathrm{GL}(2, F)$ est admissible. Rappelons que c'est le quotient V/V_0, où V (resp. V_0) est l'espace des fonctions localement constantes (resp. constantes) sur G/B. Il suffit de montrer que V est admissible. D'après la décomposition d'Iwasawa $G = BK = KB$, le double quotient $K_n\backslash G/B$ est fini. En effet le quotient $K_n\backslash K$ est fini. Une fonction de V^{K_n} est entièrement déterminée par ses valeurs sur un système de représentants de $K_n\backslash G/B$. Ces fonctions forment donc un espace de dimension finie.

Il existe en gros deux façons de construire des représentations d'un groupe fini ou localement profini. La première utilise des méthodes cohomologiques (et de la géométrie algébrique). Nous n'en parlerons pas dans ce cours. La seconde est le procédé d'induction à partir d'une représentation d'un sous-groupe. C'est ce que nous allons étudier ici.

Comme précédemment G est localement profini. On considère en outre un sous-groupe fermé H. Il est donc lui-même localement profini.

Soit (σ, W) une représentation lisse de H. Considérons l'espace W des fonctions $f : G \longrightarrow W$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) $f(hg) = \sigma(h)f(g)$, $h \in H$, $g \in G$;

(2) il existe un sous-groupe compact ouvert $K = K_f$ de G tel que $f(gk) = f(g)$, pour tout $g \in G$ et tout $k \in K$.

On définit une représentation Σ de G dans l'espace X, c'est-à-dire un morphisme $\Sigma : G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(X)$ par

$$\Sigma(g)\, f \ : \ x \mapsto f(xg) \ , \ g, x \in G$$

En d'autres termes, l'action s'effectue par translation à droite. La condition (2) assure que (Σ, X) est une représentation *lisse*. On l'appelle *l'induite lisse de* (σ, W) *à* G. La notation usuelle est

$$(\Sigma, X) = \mathrm{Ind}_H^G \sigma \ , \text{ ou parfois } \mathrm{Ind}(H, G, \sigma) \ .$$

Le procédé d'induction possède la propriété *fonctorielle suivante*. Soient (σ, W), (π, V) deux représentations lisses de H et (Σ, X), (Π, Y) leurs induites lisses. Supposons que $\varphi : W \longrightarrow V$ soit un opérateur d'entrelacement. Alors on a un opérateur d'entrelacement naturel entre les induites, $\Phi = \mathrm{Ind}_H^G(\varphi)$, défini de la façon suivante : pour f :

$G \longrightarrow W$ élément de X, on associe $\Phi(f) : G \longrightarrow V$ donnée par $\Phi(f)(g) = \varphi(f(g))$. Un vérification de routine (la faire !) donne bien

$$\Phi \in \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G \sigma, \mathrm{Ind}_H^G \pi))$$

Si $\sigma = \pi$ et φ est l'identité de W, alors $\Phi = \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_W$. Enfin si (σ_i, W_i), $i = 1, 2, 3$, sont trois représentations lisses de H et $\varphi \in \mathrm{Hom}_H(\sigma_1, \sigma_2)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_H(\sigma_2, \sigma_3)$, on l'identité :

$$\mathrm{Ind}_H^G\,(\psi \circ \varphi) = (\mathrm{Ind}_H^G\,\psi) \circ (\mathrm{Ind}_H^G\,\varphi)\ .$$

Proposition. ([BH](2.4), page 18) *Avec les notations précédentes, si la suite*

$$W_1 \longrightarrow W_2 \longrightarrow W_3$$

est exacte, alors la suite

$$\mathrm{Ind}_H^G\,W_1 \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G\,W_2 \longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G\,W_3$$

est exacte.

Exemple 1. Un caractère lisse χ du tore diagonal

$$T = \{t = \mathrm{Diag}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\ ,\ t_1, t_2 \in F^\times\}$$

est de la forme $\chi(t) = \chi_1(t_1)\chi_2(t_2)$, où pour $i = 1, 2$, χ_i est un caractère lisse du groupe $F^\times$. On utilise la notation $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$. Le groupe T est isomorphe au quotient B/U, ce qui permet de voir un caractère $\chi_1 \otimes \chi_2$ de T comme un caractère de B. Concrètement :

$$\chi_1 \otimes \chi_2 (\begin{pmatrix} t_1 & u \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}) = \chi_1(t_1)\chi_2(t_2)\ ,\ t_1, t_2 \in F^\times\ ,\ u \in F\ .$$

On regarde un tel charactère χ comme une représentation de B dans la droite vectorielle $W = \mathbb{C}$. L'induite $\mathrm{Ind}_H^G \chi_1 \otimes \chi_2$ est la représentation par translation à droite dans l'espace X des fonctions $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifient :

(1) $f(bg) = \chi(b)f(g)$.

(2) Il existe un sous-groupe compact ouvert K de G, tel que $f(gk) = f(g)$, pour tout $k \in K$.

Notons que cette représentation est *admissible*. En effet un élément f de X^{K_n} est entièrement déterminée par ses valeurs sur un système de représentant du double quotient $B\backslash G/K_n$, qui est fini d'après la décomposition d'Iwasawa.

Lorsque $\chi = \mathbf{1}_T$, l'espace X est l'espace des fonctions sur $B\backslash G$ qui sont localement constantes. Ceci montre que l'*induite* $\mathrm{Ind}_B^G \mathbf{1}_B$ *n'est pas irréductible* : elle admet la représentation triviale comme sous-représentation et la représentation de Steinberg comme quotient. Par conséquent *l'induite d'une représentation irréductible n'est pas forcément irréductible* !

Exemple 2. L'induite $\mathrm{Ind}_I^G \mathbf{1}_I$ est l'espace des fonctions sur $I\backslash G$ qui sont lisses sous l'action de G par translation à droite. Cette représentation est équivalente à la représentation par translation à gauche sur les fonctions lisses sur G/I (prendre comme opérateur d'entrelacement $f \mapsto \tilde{f}$, où $\tilde{f}(g) = f(g^{-1})$). Le quotient G/I s'identifie à l'ensemble des arêtes orientées de l'arbre X de G. L'induite est donc une sous-représentation de l'espace des fonctions complexes sur les arêtes orientées. C'est en fait le sous-espace des vecteurs lisses.

Revenons à notre situation générale de l'induite lisse (Σ, X) d'une représentation (σ, W) de H. Par restriction $\mathrm{Ind}_H^G\sigma$ peut être vue comme une représentation de H. On a alors un opérateur d'entrelacement naturel $\alpha_\sigma \in \mathrm{Hom}_H(\mathrm{Ind}_H^G\,\sigma, \sigma)$, donné par $\alpha_\sigma(f) = f(e_G)$. Cet opérateur est surjectif. En effet soit $v \in W$ quelconque. Soit K un sous-groupe compact ouvert de H fixant v. On peut le prendre de la forme $K' \cap H$ où K' est un sous-groupe compact ouvert de G (H est muni de la topologie induite !). Définissons une fonction $f \in X$ en décrétant que son support est HK' et que $f(hk') = \sigma(h).v$, $h \in H$, $k' \in K'$. Par construction cette fonction est bien définie et lisse. Alors $f_\sigma(e_G)$ est bien v. Ceci prouve d'ailleurs que *si W n'est pas nul, l'induite $\mathrm{Ind}_H^G\, W$ n'est pas nulle.*

Malgré la simplicité de sa preuve, le résultat suivant est primordial.

Réciprocité de Frobenius. *Soit H un sous-groupe fermé d'une sous-groupe localement profini G. Soient (σ, W) une représentation lisse de H et (π, V) une représentation lisse de G. Alors l'application naturelle :*

$$\mathrm{Hom}_G\,(\pi, \mathrm{Ind}_H^G\,\sigma) \longrightarrow \mathrm{Hom}_H\,(\pi, \sigma)$$

$$\varphi \mapsto \alpha_\sigma \circ \varphi$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriel.

Preuve. On montre l'isomorphisme en construisant explicitement un inverse. Soit $f \in \mathrm{Hom}_H(\pi, \sigma)$. On définit $f_* \in \mathrm{Hom}_G\,\pi, \mathrm{Ind}_H^G\,\sigma)$ en décrétant que $f_*(v)$ est la fonction $g \mapsto f(\pi(g)v)$. La preuve que les deux procédés sont inverses l'un de l'autre est tout-à-fait formelle.

Avertissement. En général il n'y a aucun lien évident entre les espaces d'entrelacement $\mathrm{Hom}_G\,(\mathrm{Ind}_H^G\,\sigma, \pi)$ et $\mathrm{Hom}_H(\sigma, \pi)$. Par exemple l'un peut être nul alors que l'autre ne l'est pas !

Nous allons à présent passer à une variante de l'induction lisse : l'*induction lisse à support compact*, encore appelée l'*induction compacte*.

On garde les notations précédentes : (σ, W) est une représentation lisse de H, sous-groupe fermé de G. A l'intérieur de X, on considère le sous-espace vectoriel X_c des fonctions $f : X \longrightarrow W$ qui sont à support compact modulo H. Rappelons que si T est un espace topologique et $f : T \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, le support de f est :

$$\mathrm{Supp}\, f = \text{ adhérence de } \{x \in T\ ;\ f(x) \neq 0\}\ .$$

Une fonction f sur G est à support compact modulo H si l'image de son support dans $H\backslash G$ est compact. En d'autres termes, il doit exister une partie compacte $C = C_f$ de G telle que $\mathrm{Supp}\, f \subset HC$. On voit facilement que X_c est stable par l'action par translation à droite de G. On obtient une sous-représentation (Σ, X_c) de (Σ, X) que l'on appelle *induite compacte de H à G de σ* et que l'on note $\mathrm{c} - \mathrm{Ind}_H^G\,\sigma$. Si le quotient $H\backslash G$ est compact, on a l'égalité $\mathrm{Ind}_H^G\,\sigma = \text{c-}\mathrm{Ind}_H^G\,\sigma$.

Tout comme pour l'induction lisse, on montre que *l'induction compacte tranforme une suite exacte en une suite exacte (***exercice !***).*

Suppose à présent que le sous-groupe H est ouvert (rappel : donc fermé!!). On a alors une injection H-équivariante naturelle $\alpha_\sigma^c\ :\ \sigma \longrightarrow \text{c-Ind}_H^K\,\sigma$. Elle envoie un vecteur $w \in W$ sur la fonction f_w qui a pour support H et qui est donnée par $f_w(h) = \sigma(h).w$, $h \in H$.

Lemme *Une fonction $f\ :\ G \longrightarrow W$ est dans X_c si et seulement si :*

(1) $f(hg) = \sigma(h)f(g)$, $h \in H$, $g \in G$;

(2) f est à support compact modulo H.

En d'autres termes, une fonction vérifiant (1) et (2) est automatiquement lisse sous l'action de G par translation à droite.

Preuve. Soit f vérifiant (1) et (2). D'après (1) son support est une réunion de classes à gauche sous H. Il existe un ensemble I, peut être infini, et des éléments g_i, $i \in I$ de G, tels qu'on ait la réunion disjointe $\text{Supp}\, f = \coprod_{i\in I} Hg_i$. Soit $p : G \longrightarrow H\backslash G$ la projection naturelle. On a

$$p(\text{Supp}\, f) = \{p(g_i)\ ;\ i \in I\}\ .$$

L'espace $H\backslash G$ étant discret, ses parties compactes sont ses parties finies. Donc l'ensemble I est fini. Pour chaque $i \in I$, posons $f_i = f_{|Hg_i}$. Alors $f_i \in X_c$ et $f = \sum_{i\in I} f_i$. Il suffit donc de montrer que chaque f_i est lisse. Or cette fonction est stabilisée par l'ouvert $g_i^{-1}(H \cap \text{Stab}\, f(g_i))g_i$.

Lemme. *Soit H un sous-groupe ouvert de G et (σ, W) une représentation lisse de H.*

(1) *L'application $\alpha_\sigma^c\ :\ \sigma \longrightarrow$ c-Ind$_H^G\,\sigma$, $w \mapsto f_w$ est un H-isomorphisme de W sur le sous-espace des fonctions dans c-Ind$_H^G$ à support dans H.*

(2) *Soit $\mathcal{B} = (w_j)_{j\in J}$ une $\mathbb{C}$-base de W. Soit $\{g_i\ ;\ i \in I\}$ un système de représentants de $H\backslash G$. Alors l'ensemble $\{g_i.f_{w_j}\ ;\ i \in I,\ j \in J\}$ est une $\mathbb{C}$-base de X_c.*

Preuve. Le point (1) est facile et laissé au lecteur. Le fait que la famille $\{g_i.f_{w_j}\ ;\ i \in I,\ j \in J\}$ est génératrice découle de la démonstration du lemme précédent. Le fait qu'elle est libre se montre en regardant les support.

Proposition. **Réciprocité de Frobenius pour l'induction compacte**. *Soit H un sous-groupe ouvert de G. Soient (σ, W) et (π, V) des représentations lisses de H et G respectivement. L'application canonique*

$$\text{Hom}_G\,(\textit{c-Ind}_H^G\,\sigma, \pi) \longrightarrow \text{Hom}_H\,(\sigma, \pi)\ ,\ \varphi \mapsto \varphi \circ \alpha_\sigma^c$$

est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Preuve. On montre qu'on a là un isomorphisme en exhibant un inverse. Celui-ci est donné de la façon suivante. Il associe à $\psi \in \text{Hom}_H\,(\sigma, \pi)$ l'élement ψ_* de $\text{Hom}_G\,(\text{c-Ind}_H^G\,\sigma, \pi)$ donné par

$$\psi_*(g_i f_{w_j}) = \pi(g_i)\psi(w_j)\ , i \in I\ ,\ j \in J\ .$$

La vérification est formelle.

Dans la suite nous ajoutons une restriction sur le groupe G :

Hypothèse. *Dorénavant, nous supposons que pour tout sous-groupe compact ouvert K de G, le quotient G/K est dénombrable.*

Remarques 1) En fait pour qu'un groupe localement profini G vérifie cette hypothèse, il suffit qu'elle soit vraie pour au moins un sous-groupe ouvert compact K (voir [BH], page 20).

2) Le groupe $G = \mathrm{GL}(2, F)$ vérifie cette hypothèse. En effet, il suffit de montrer qu'elle est vraie lorsque $K = \mathrm{GL}(2, \mathfrak{o}_F)$. Considérons la projection $p : G/K \longrightarrow G/F^\times K$. Le quotient $G/F^\times K$ est dénombrable car il s'identifie à l'ensemble des sommets de l'arbre X de G. Pour tout $x \in G/F^\times K$, la fibre $p^{-1}(x)$ est en bijection avec $F^\times/\mathfrak{o}^\times$, lui-même en bijection avec $\mathbb{Z}$ via la valuation. Donc

$$G/K = \bigcup_{x \in G/F^\times K} p^{-1}(x)$$

est dénombrable car réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

Proposition. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Alors la dimension $\mathrm{Dim}_{\mathbb{C}} V$ est dénombrable.*

Preuve. Soit $v \in V$ non nul et soit K un sous-groupe ouvert compact fixant v. Puisque V est irréductible, elle est engendrée par la partie dénombrable

$$\{\pi(g).v \ ; \ g \text{ parcourt un système de représentants de } G/K\} \ .$$

De cette partie génératrice dénombrable, on peut extraire une base dénombrable.

Le résultat suivant est très important.

Lemme de Schur. *Si (π, V) est une représentation lisse irréductible de G, alors tout endomorphisme de V est un multiple de l'identité :*

$$\mathrm{End}_G(V) := \mathrm{Hom}_G(V, V) = \mathbb{C}\mathrm{Id}_V \ .$$

Preuve. Pour l'addition et la composition des opérateurs d'entrelacement, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{End}_G(V)$ a une structure d'anneau. De plus c'est un corps (peut être non-commutatif) au sens ou tout élément non-nul est inversible. En effet si $\varphi \in \mathrm{End}_G(V)$, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\Im\varphi$ sont des sous-représentations de G qui ne peuvent être que $\{0\}$ et V respectivement.

Fixons $v \in V$ non nul. Alors pour $\varphi \in \mathrm{End}_G(V)$, la connaissance de $\varphi(v)$ entraîne celle des $\varphi(\pi(g).v)$. Donc on a une injection de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathrm{End}_G(V) \longrightarrow V$, $\varphi \longrightarrow \varphi(v)$, ce qui prouve que $\mathrm{End}_G(V)$ a une dimension dénombrable.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\psi \in \mathrm{End}_G(V)$ qui ne soit pas une homothétie. Alors ψ, comme endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, ne possède aucune valeur propre. En effet si le noyau de $\psi - \lambda \mathrm{id}_V$ était non nul, on aurait $\psi = \lambda \mathrm{id}_V$. On peut donc considérer la famille non dénombrable d'endomorphismes $(\psi - \lambda \mathrm{id}_V)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Nous allons montrer qu'ils sont linéairement indépendants. Ce qui apportera une contradiction. Supposons qu'il existe des complexes distincts $(\lambda_i)_{i=1,\dots,d}$ et des complexes non tous nuls $(\mu_i)_{i=1,\dots,d}$ tels que

$$\sum_{i=1,\dots,d} \mu_i (\psi - \lambda_i \mathrm{id}_V)^{-1} = 0 \ .$$

En chassant les dénominateurs, il vient

$$\sum_{i=1,\dots,d} \mu_i \prod_{j \neq i} (\psi - \lambda_j \mathrm{id}_V) = 0 \ .$$

Ceci signifie que $\displaystyle\sum_{i=1,\dots,n} \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)$ est un polynôme annulateur non nul de ψ. Or ψ n'a aucun polynôme annulateur non nul, puisqu'il n'a pas de valeur propre.

Corollaire-Définition (Caractère central). *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G. Notons $Z = Z(G)$ le centre de G. Il existe un caractère lisse $\omega_\pi : Z \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ tel que*

$$\pi(z).v = \omega_\pi(z) v \ , \ z \in Z \ , \ v \in V \ .$$

Preuve. Pour tout $z \in Z$, on a $\pi(z) \in \mathrm{End}_G(V)$. D'après le lemme de Schur, il existe un (unique) nombre complexe non nul $\omega_\pi(z)$ tel que $\pi(z)v = \omega_\pi(z)v$, pour tout v dans V. On a facilement que ω_π est un morphisme de groupe de Z dans $\mathbb{C}^\times$. Soit $v \in V$ non nul et K un sous-groupe ouvert fixant v. Alors $\pi(z)v = v$ pour tout z dans le sous-groupe ouvert $K \cap Z$ de Z. Donc $K \cap Z \subset \mathrm{Ker}\, \omega_\pi$, ce qui prouve que ω_π est lisse.

Corollaire. *Si G est abélien, tout représentation irréductible de G est de dimension* 1.

Proposition. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de $G = \mathrm{GL}(2, F)$. Alors on est dans l'un des cas suivants.*

(1) *La dimension de V est infinie dénombrable.*

(2) *L'espace V est de dimension 1 et π est un caractère de la forme $\chi \circ \mathrm{Det}$, où χ est une représentation lisse de $F^\times$.*

Preuve. Sous forme de *Problème*. Nous supposons que V est de dimension finie et montrons que l'on est alors dans le cas (2).

1) Montrer que la famille d'endomorphismes de V donnée par

$$\{\pi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ; \ x \in F^\times\}$$

possède un vecteur propre (non nul) commun v_0.

2) Pour $a \in F$, on note $u(a)$ la matrice unipotente $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$, tel que pour tout $a \in \mathfrak{p}^{k_0}$, $\pi(u(a)).v_0 = v_0$.

3) En déduire que pour tout $a \in F$, $\pi(u(a)).v_0 = v_0$. On pourra utiliser la formule

$$\begin{pmatrix} \varpi^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \varpi^k a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

4) En déduire que $\mathrm{GL}(2, F)$ stabilise la droite $\mathbb{C}v_0$ et conclure. (On pourra utiliser le fait que les matrices unipotentes supérieures et inférieures engendrent $\mathrm{SL}(2, F)$.)

Nous allons à présent introduire la notion de *contragrédiente* d'une représentation. Elle est plus subtile que dans le cas d'un groupe fini.

Soit (π, V) une représentation lisse de G. Soit V^* le dual linéaire de V, c'est-à-dire l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ des formes linéaires sur V. On note $\langle v^*, v\rangle$ l'évaluation $v^*(v)$ d'une forme linéaire v^* sur un vecteur v. On a donc une application bilinéaire :

$$V^* \times V \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ (v^*, v) \mapsto \langle v^*, v\rangle \ .$$

Le groupe G agit sur V^* via une représentation π^* donnée par

$$\langle \pi^*(g)v^*, v\rangle = \langle v^*, \pi(g^{-1})v\rangle \ , \ g \in G, \ v^* \in V^*, \ v \ inV \ .$$

Cette représentation n'a aucune raison d'être lisse en général. On note $\tilde{V}$ l'espace vectoriel des formes linéaire lisses de V^* :

$$v^* \in \tilde{V} \text{ si et seulement si } \mathrm{Stab}_G(v^*) \text{ est ouvert.}$$

La *contragrédiente* de π est la représentation de G dans l'espace $\tilde{V}$. On la note $(\tilde{\pi}, \tilde{V})$. On continue de noter de la même façon le crochet de dualité de $V^* \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ restreint à $\tilde{V} \times V$. Ainsi on a l'identité :

$$\langle \tilde{\pi}(g)\tilde{v}, v\rangle = \langle \tilde{v}, \pi(g^{-1})v\rangle \ , \ g \in G, \ \tilde{v} \in \tilde{V}, \ v \in V \ .$$

Soit K un sous-groupe compacte ouvert de K. Rappelons qu'on a $V = V^K \oplus V(K)$, où $V(K)$ est le sous-K-module de V engendré par les $v - \pi(k)v$, $v \in V$, $k \in K$. Si $v \in \tilde{V}^K$ est une forme linéaire fixée par K, elle s'annule sur $V(K)$:

$$\tilde{v}(v - \pi(k)v) = \tilde{v}(v) - \tilde{v}(\pi(k)v) = \tilde{v}(v) - [\tilde{\pi}(k^{-1})\tilde{v}](v) = \tilde{v}(v) - \tilde{v}(v) = 0 \ .$$

Il s'ensuit que $\tilde{v}$ est entièrement déterminée par sa restriction à V^K. Réciproquement une forme linéaire quelconque sur V^K se prolonge en une forme linéaire invariante sous K en la prenant nulle sur le supplémentaire $V(K)$. On a donc :

Proposition. *L'application de restriction $V^* \longrightarrow (V^K)^*$, $\varphi \mapsto \varphi_{|V^K}$, induit un isomorphisme naturel $\tilde{V}^K \simeq (V^K)^*$.*

Corollaire. *Soit (π, V) une représentation lisse de G et $v \in V$ non nul. Il existe une forme lisse $\tilde{v} \in \tilde{V}$ telle que $\langle \tilde{v}, v\rangle \neq 0$.*

Démonstration. Se ramener au cas d'un espace dual habituel en utilisant la proposition précédente.

Comme pour les espaces vectoriels, on peut s'intéresser à la bidualité. Si (π, V) est une représentation lisse de G, on peut former la "double contragrédiente" $(\tilde{\tilde{\pi}}, \tilde{\tilde{V}})$. On a une application G-équivariante naturelle $\delta : V \longrightarrow \tilde{\tilde{V}}$ donnée par

$$\langle \delta(v), \tilde{v} \rangle_{\tilde{V}} = \langle \tilde{v}, v \rangle_V \ , \ v \in V, \ \tilde{v} \in \tilde{V} \ .$$

Par le corollaire précédent est elle injective.

Proposition ([BH], page 24). *Soit (π, V) une représentation lisse de G. Alors l'application canonique $\delta : V \longrightarrow \tilde{\tilde{V}}$ est un isomorphisme si et seulement si π est admissible.*

Démonstration. Découle du fait que si W est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, l'application canonique $W \longrightarrow W^{**}$ de l'espace dans le bidual est un isomorphisme si et seulement si W est de dimension finie.

Proposition ([BH], pages 24 et 25). 1) *L'opération de prendre la contragrédiente transforme une suite exacte en une suite exacte.*

2) *Une représentation admissible est irréductible si et seulement si sa contragrédiente est irréductible.*

C. Mesures de Haar et dualité

Dans ce chapitre, le groupe G désigne un groupe topologique localement profini.

Notre but ici est d'étudier les mesures invariantes sur G ou sur les espaces quotients $H\backslash G$, H sous-groupe fermé de G.

Notons $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions localement constantes sur G est à support compact.

Exercice. *Soit f une fonction localement constante et à support compact sur G.*

1) *Montrer qu'il existe des sous-groupes ouverts et compacts K_1 et K_2 tels que*

$$f(k_1 g) = f(gk_2) = f(g)\ , g \in G,\ k_1 \in K_1,\ k_2 \in K_2\ .$$

2) *Montrer que f est une combinaison linéaire (finie) de fonctions caractéristiques de classes à gauche $K_1 g$ (resp. de classes à droite gK_2).*

3) *En prenant $K = K_1 \cap K_2$, montrer que f est une combinaison linéaire (finie) de fonctions de la forme $\mathbf{1}_{KgK}$, c'est-à-dire de fonctions caractéristiques de doubles classes KgK.*

On a deux actions naturelles de G sur $\mathcal{C}_c^\infty(G)$, par translation à gauche et à droite respectivement. On les notes λ et ρ :

$$\lambda(g)f\ :\ x \mapsto f(g^{-1}x)\ \text{ et }\ \rho(g)f\ :\ x \mapsto f(xg)\ ,\ x, g \in G,\ f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)\ .$$

D'après l'exercice, les deux représentations $(\mathcal{C}_c^\infty(G), \lambda)$ et $(\mathcal{C}_c^\infty(G), \rho)$ sont lisses.

Définition. *Une intégrale de Haar à droite sur G est une forme linéaire non nulle*

$$I\ :\ \mathcal{C}_c^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

(1) $I(\rho(g)f) = I(f)$, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et tout $g \in G$.

(2) $I(f) \geqslant 0$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ qui prend des valeurs réelles et positives (on écrit $f \geqslant 0$).

On définit de même la notion d'*intégrale de Haar à gauche*.

Théorème. *Il existe sur G une mesure de Haar à droite (resp. à gauche). Elle est unique à un facteur multiplicatif dans $\mathbb{R}_+^*$ près.*

Pour la démonstration nous renvoyons à [BH], page 26. Fixons une suite décroissante de sous-groupes compacts et ouverts $(K_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$\bigcap_{n\geqslant 0} K_n = \{1_G\}\ .$$

Fixons un nombre réel $\mu_0 > 0$. Alors on peut associer à ces données une forme linéaire invariante à droite I sur $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ de la façon suivante. Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, alors f est invariante à gauche sous K_n pour n assez grand. Pour un tel n, f s'écrit :

$$f = \sum_{i=1,\ldots,r} a_i \mathbf{1}_{K_n g_i}$$

On pose alors

$$I(f) = \frac{1}{[K_0 : K_n]}\,\mu \sum_{i=1,\ldots,r} a_i$$

En termes de théorie de la mesure, on a donc décrété que la mesure de K_0 est μ et cette condition détermine I entièrement. On explicite de façon similaire les intégrales de Haar à gauche.

Soit I une intégrale de Haar à droite sur G. On définit la *mesure* correspondante d'une partie ouverte et compacte S de G par

$$\mu_G(S) = I(\mathbf{1}_S)\ .$$

Alors $\mu_G(S) > 0$ et la mesure μ_G vérifie $\mu_G(Sg) = \mu_G(S)$ pour tout $g \in G$. La fonction μ_G est appelée une mesure de Haar à droite sur G. On définit de même les mesures de Haar à gauche. On utilise la notation traditionnelle

$$I(f) = \int_G f(g)d\mu_G(g)\ ,\ f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)\ .$$

Enfin, si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et si S est une partie ouverte et compacte de G, on définit l'intégrale de f sur S (relativement à I, où à μ_G) comme étant le nombre :

$$\int_S f(x)d\mu_G(x) := \int_G \mathbf{1}_S(x)f(x)d\mu_G(x)\ .$$

Exemples. 1) *Mesure de Haar sur* $(F,+)$. Le groupe $(F,+)$ étant abélien, il n'y a aucune différence entre une mesure de Haar à gauche ou à droite. Une intégrale de Haar doit vérifier $I(f) = I(f(\,.\,+a))$, pour tout $a \in F$ et toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(F)$, où $f(\,.\,+a)$ est la fonction $x \mapsto f(x+a)$. Il existe une unique mesure de Haar qui donne une valeur $\mu_0 > 0$ fixée à l'avance à l'ouvert compact $\mathfrak{o}$: $\mu_F(\mathfrak{o}) = \mu_0$. Vérifier en **exercice** les points suivants.

(1) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $\mu_F(\mathfrak{p}^k) = \mu_0 q^{-k}$, $q = \mathrm{card}\,\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$.

(2) Pour tout partie ouverte compacte S de F et pour tout $x \in F^\times$, $\mu_F(xS) = |x|_F\mu_F(S)$, où $|{-}|$ est la valeur absolue normalisée par $|\varpi| = 1/q$.

(3) Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(F)$ et $a \in F^\times$, on a la formule de changement de variable :

$$\int_F f(xa)d\mu_F(x) = |a|^{-1}\int_F f(x)d\mu_F(x)\ .$$

2) *Mesure de Haar sur* $F^\times$. Puisque $F^\times$ est un ouvert de f, on peut voir une fonction à support compact sur $F^\times$ comme une fonction à support compact sur F en posant

$f(0) = 0$. En fixant une intégrale de Haar I_+ sur $(F, +)$, on peut donc considérer la forme linéaire $I_\times$ sur $\mathcal{C}_c^\infty(F^\times)$ donnée par

$$I_\times(f) = \int_F f(x) \frac{1}{|x|_F} d\mu_F(x) \ .$$

Cette fonctionnelle est positive et par la formule (3) ci-dessus, elle est invariante par l'action (à droite ou à gauche) de $F^\times$. C'est donc une mesure de Haar sur $(F, \times)$.

Notations. Une mesure de Haar sur $(F, +)$ sera notée dx au lieu de $d\mu_F(x)$. La mesure de Haar sur $(F, \times)$ correspondante sera notée $d^\times x = \dfrac{dx}{|x|}$.

3) *Mesure de Haar sur un produit.* Soient G_1 et G_2 deux groupes localement profinis. Alors lel groupe $G = G_1 \times G_2$ est localement profini (**exercice !**). Si pour $i = 1, 2$, K_i désigne un sous-groupe ouvert compact fixé de G_i, alors $K = K_1 \times K_2$ est un sous-groupe ouvert compact de G. Soient $d\mu_{G_i}$, $i = 1, 2$ des mesures de Haar sur G_1 et G_2. On sait qu'il existe une unique mesure de Haar μ_G sur G telle que

$$\mu_G(K) = \mu_{G_1}(K_1)\mu_{G_2}(K_2) \ .$$

Cette mesure de Haar s'appelle *la mesure de Haar produit* de μ_{G_1} et μ_{G_2} et se note $\mu_{G_1} \otimes \mu_{G_2}$.

Exercice. Pour $i = 1, 2$, soit $f_i \in \mathcal{C}_c^\infty(G_i)$. On définit une fonction $f_1 \otimes f_2$ sur G par

$$(f_1 \otimes f_2)(g_1, g_2) = f_1(g_1).f_2(G_2)$$

(1) Montrer que $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$. Montrer que les fonctions de la forme $f_1 \otimes f_2$ engendrent $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

(2) Montrer que

$$\int_G (f_1 \otimes f_2)(g) d\mu_{G_1} \otimes d\mu_{G_2}(g) = \int_{G_1} f_1(g_1) d\mu_{G_1}(g_1) . \int_{G_2} f_2(g_2) d\mu_{G_2}(g_2) \ .$$

On généralise les considérations précédentes à un nombre quelconque fini de facteurs. En particulier sur le groupe $(F^N, +)$ obtenu en faisant un produit de N copies de F, on a la mesure de Haar $dx^{\otimes N} = dx \otimes dx \otimes \cdots \otimes dx$ (N facteurs) provenant d'une mesure de Haar fixée dx sur $(F, +)$.

Nous aurons aussi à intégrer des fonctions *à valeurs vectorielles.* Nous le ferons sans supposer l'existence d'une quelconque topologie sur les vecteurs.

Soient donc G un groupe localement profini et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie. On veut associer à une mesure de Haar (par exemple à gauche) $d\mu_G$ sur G un intégrale (forme linéaire) sur l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(G, V)$ des fonctions localement constantes, à support compact et à valeurs dans V.

Exercice. Avec les notations précédentes, pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $v \in V$, définissons une fonction notée $f \otimes v$ dans $\mathbb{C}(G, V)$ par la formule

$$(f \otimes v)(g) = f(g)v \ , \ g \in G$$

(1) Montrer que les fonctions de la forme $f \otimes v$ engendrent l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c^\infty(G, V)$.

On définit une forme linéaire I_V sur $\mathcal{C}_c^\infty(G, V)$ par

$$I_V(\sum_{i=1,\ldots,r} \lambda_i f_i \otimes v_i = \sum_{i=1,\ldots,r} \lambda_i \int_G f_i(g) d\mu_G(g).v_i$$

(2) Montrer que I_V est bien définie.

La fonctionnelle I_V s'appelle l'intégrale de Haar associée à $d\mu_G$. On utilise la notation :

$$I_V(\varphi) = \int_G \varphi d\mu_G(g) \ , \ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(G, V) \ .$$

Cette intégrale à la même invariance (ici à gauche) que l'intégrale de Haar sur les fonctions à valeurs scalaires.

Soit μ_G une mesure de Haar à gauche sur G. Pour $g \in G$, on peut considérer la fonctionnelle

$$\mathcal{C}_c^\infty(G) \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ f \mapsto \int_G f(xg) d\mu_G(x) \ .$$

Elle est positive, non nulle, et toujours invariante à gauche. C'est donc un multiple de l'intégrale de départ : il existe $\delta_G(g) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\delta_G(g) \int_G f(xg) d\mu_G(x) = \int_G f(x) d\mu_G(x) \ , \ f \in \mathcal{C}_c^\infty(G) \ .$$

Il est évident que la fonction $\delta_G : G \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est un homomorphisme de groupes. Notons qu'elle ne dépend pas de la mesure μ_G choisie. Elle est trivial si G est abélien

Définition. *La fonction δ_G s'appelle le* module*, ou* la fonction modulaire*, du groupe G. On dit que le groupe G est unimodulaire si $\delta_G \equiv 1$.*

Il est clair que G est unimodulaire si et seulement si toute mesure de Haar à gauche est aussi une mesure de Haar à droite.

Grâce à la fonction modulaire, on peut faire des changements de variable dans les intégrales en utilisant l'écriture symbolique :

$$d\mu_G(xg) = \delta_G(g) d\mu_G(x) \ .$$

Notons que le module *est trivial sur tout sous-groupe compact de G.*

Exercice. (1)*Montrer que le δ_G est un caractère lisse de G.*

(2) *Montrer qu'un caractère lisse à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ d'un groupe compact localement profini est trivial (se ramener au cas d'un groupe fini).*

(3)*Conclure.*

Exercice. *Soit δ le module de $G = \mathrm{GL}(2, F)$.*

(1) *Montrer qu'il est trivial sur le centre de G, sur* $\mathrm{SL}(2, F)$ *et sur $K \cap T$, le sous-groupe des matrices diagonales à coefficients dans $\mathfrak{o}^\times$.*

(2) *Montrer que* δ *prend la même valeur en* $\mathrm{Diag}(\varpi, 1)$ *et* $\mathrm{Diag}(1, \varpi)$ *(ces éléments sont conjugués).*

(3) *En déduire que* δ *est trivial et que* G *est unimodulaire.*

Soit μ *une mesure de Haar sur* $A = \mathrm{M}(2, F)$ *(on peut par exemple prendre* $\mu = dx^{\otimes 4}$*, où* dx *est une mesure de Haar sur* F *et où l'on identifie* A *à* F^4*. Nous allons démontrer que*

$$\Phi \mapsto \int_A \Phi(x) |\det x|^{-2} \, d\mu(x) \ , \ \ \Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$$

est une intégrale de Haar sur G *(on regarde ici* $\Phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ *comme une fonction sur* A *en l'étendant par* 0*).*

(4) *Considérons la forme linéaire sur* $\mathcal{C}_c^\infty(A)$ *donnée par*

$$\Phi \mapsto \int_A \Phi(gx) d\mu(x) \ .$$

C'est encore une intégrale de Haar sur A*, donc diffère de l'intégrale initiale d'un facteur* Δ*. Considérons le sous-groupe compact-ouvert* $\mathfrak{M} = \mathrm{M}(2, \mathfrak{o})$ *et sa fonction caractéristique* Φ_0*. Posons* $\mathfrak{M}' = g^{-1}\mathfrak{M}$*. Montrer que*

$$\int_A \Phi_0(gx) d\mu(x) = \mu(\mathfrak{M}') = \mu(\mathfrak{M}) \frac{[\mathfrak{M}' : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')]}{[\mathfrak{M} : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')]} \ .$$

On a donc

$$\Delta(g) = \frac{[\mathfrak{M}' : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')]}{[\mathfrak{M} : (\mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}')]} \ .$$

(5) *Montrer que la fonction* Δ *est invariante à gauche et à droite sous* $\mathrm{GL}(2, \mathfrak{o})$*. Grâce à la décomposition de Cartan, se ramener au cas où* g *est diagonal pour en déduire que* $\Delta(g) = |\det g|^{-2}$*.*

(6) En déduire que l'intégrale proposée est bien une intégrale de Haar sur G*.*

Exercice. *Mesure de Haar sur le sous-groupe de Borel.* Rappelons que $B \subset \mathrm{GL}(2, F)$ peut s'écrire comme le produit semidirect $B = TN$, où $T \simeq F^\times \times F^\times$ et $N \simeq (F, +)$. On muni T de la mesure de Haar $d\mu_T = d^\times x \otimes d^\times x$, où $d^\times x$ est une mesure de Haar sur $F^\times$, et N d'une mesure μ_N correspondant à la mesure de Haar sur $(F, +)$. En particulier T et N sont unimodulaires.

1) On définit une forme linéaire I sur $C_c^\infty(B)$ par

$$I(\Phi) = \int_N \int_T \Phi(tn) d\mu_T(t) d\mu_N(n), \ \ \Phi \in C_c^\infty(B) \ .$$

Montrer que Φ est une intégrale de Haar à gauche.

2) Montrer que la fonction module sur B est donnée par

$$\delta_B(tn) = |t_2/t_1| \ , n \in N, t = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \in T \ .$$

Le groupe B n'est donc pas unimodulaire.

Soit H un sous-groupe fermé de G. Le groupe G agit à droite sur le quotient $H\backslash G$. On peut se demander s'il existe une intégrale positive sur $\mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G)$ qui soit invariante sous l'action de G. Ca n'est pas toujours le cas.

Soit $\theta : H \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère lisse de H et considérons l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)$ des fonctions f qui

– sont lisses sous l'action de G à droite,
– à support compact modulo H
– se transformes par $f(hg) = \theta(h)f(g)$, $h \in H$, $g \in G$.

Cet espace n'est rien d'autre que l'induite compacte $\text{c-Ind}_H^G\,\theta$.

Proposition. *Soit $\theta : H \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ un caractère lisse de H. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *il existe une forme linéaire non nulle $I_\theta : \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta) \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie $I_\theta(\rho_g f) = I_\theta(f)$, pour tout $g \in G$.*

(2) *On a l'égalité $\theta = (\delta_G)_{|H}\delta_H^{-1}$.*

Sous ses condition, la forme linéaire I_θ est bien déterminée à un facteur près.

Preuve. Admise. Voir [BH], page 30.

Proposition. *Posons $\theta = (\delta_G)_{|H}\delta_H^{-1}$. Il existe une unique forme linéaire I_θ sur $\mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)$ telle que :*

(1) *$I_\theta(\rho_g f) = I_\theta(f)$, pour tout $g \in G$ et toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)$;*

(2) *$I_\theta(f) \geqslant 0$, pour toute $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)$ telle que $f \geqslant 0$.*

De plus ces conditions déterminent uniquement I_θ à un facteur > 0 près.

Preuve. Admise. Voir [BH], page 31.

On utilise la notation traditionnelle :

$$I_\theta(f) = \int_{H\backslash G} f(g)d\mu_{H\backslash G}(g)\ ,\ f \in \mathcal{C}_c^\infty(H\backslash G, \theta)\ ,$$

et on dit que $\mu_{H\backslash G}$ est une *mesure positive semi-invariante* sur le quotient $H\backslash G$. On utilisera la notation :

$$\delta_{H\backslash G} = \delta_H^{-1}(\delta_G)_{|H}\ .$$

Théorème de dualité [BH], page 32. *Soit $\mu_{H\backslash G}$ une mesure positive semi-invariante sur $H\backslash G$. Soit (σ, W) une représentation lisse de H. On a alors un isomorphisme naturel :*

$$\widetilde{(\textit{c-Ind}_H^G\,\sigma)} \simeq \textit{Ind}_H^G\,\delta_{H\backslash G} \otimes \tilde{\sigma}$$

ne dépendant que du choix de $\mu_{H\backslash G}$.

Nous terminons ce chapitre sur l'intégration par une extension de la notion d'intégrale à des fonctions qui ne sont pas forcément à support compact.

Considérons donc un groupe topologique G localement profini et fixons une mesure de Haar à gauche μ_G. Soit f une fonction complexe sur G supposé lisse pour l'action à gauche de G (en particulier cette fonction est localement constante, mais son support n'est pas *a priori* compact). Fixons un compact ouvert K tel que $f(kg) = f(g)$, pour tout $k \in K$ et tout $g \in G$. Si la série

$$\sum_{g \in K\backslash G} \int_{Kg} |f(x)| d\mu_G(x)$$

converge alors la série sans valeur absolue converge et l'on pose par définition :

$$\int_G f(x) d\mu_G(x) = \sum_{g \in K\backslash G} \int_{Kg} f(x) d\mu_G(x) = \mu_G(K) \sum_{g \in K\backslash G} f(g) \ .$$

Cette définition ne dépend pas du choix de K.

Exemple. Soit χ un caractère lisse de $F^\times$ à valeurs dans les nombres complexes de module 1 et φ la fonction caractéristique de $\mathfrak{o} \subset F$. Posons

$$Z(\chi, s) = \int_{F^\times} \varphi(x)\chi(x)|x|^s d^\times x \ , \ s \in \mathbb{C} \ .$$

Soit $n \geqslant 0$ assez grand pour que le noyau de χ contienne $U^n(F)$. Alors la fonction intégrée est invariante à gauche (et à droite par multiplication par $U^n(F)$ et on est dans les conditions de la définition précédente. Regardons la série

$$\sum_{g \in F^\times/U^n(F)} \int_{U^n(F)g} \varphi(x)\chi(x)|x|^s d^\times x$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{u \in U(F)/U^n(F)} \mu(U^n(F))\varphi(\varpi^k)\chi(\varpi^k u)[(\frac{1}{q})^s]^k$$

$$= \sum_{k \geqslant 0} \sum_{u \in U(F)/U^n(F)} \mu(U^n(F))\varphi(\varpi^k)\chi(\varpi^k u)[(\frac{1}{q})^s]^k$$

Elle est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 0$. Sous cette condition, on peut écrire :

$$Z(\chi, s) = \sum_{k \geqslant 0} [(\frac{1}{q})^s]^k \chi(\varpi)\mu^\times(U^n(F)) \sum_{u \in U(F)/U^n(F)} \chi(u)$$

Par l'orthogonalité des caractères d'un groupe fini (abélien ici), la somme $\sum_{u \in U(F)/U^n(F)} \chi(u)$ vaut soit 0 si $\chi_{|U(F)} \not\equiv 1$, soit $[U(F) : U^n(F)]$. Donc $Z(\chi, s) = 0$ dans le premier cas et dans le second :

$$Z(\chi, s) = \mu^\times(U(F)) \sum_{k \geqslant 0} [\chi(\varpi)(\frac{1}{q})^s]^k = \frac{1}{1 - \frac{\chi(\varpi)}{q^s}} \ .$$

D. L'algèbre de Hecke du groupe G

On travaille toujours dans le degré de généralité suivant : G est un groupe localement compact localement profini et on s'intéresse à ses représentations (complexes et) lisses.

Noter qu'un groupe fini étant localement profini, et que les représentations complexes d'un groupe fini étant de façon évidente lisses, notre théorie contient celle des représentations des groupes finis comme cas particulier.

Il est très souvent avantageux d'*algébriser* les objets. Nous allons voir comment une représentation lisse de G peut se voir comme un module sur un anneau (en fait une $\mathbb{C}$-algèbre) $\mathcal{H}(G)$, appelé l'*algèbre de Hecke de* G· Cela généralise le fait que si G est fini, la donnée d'une représentation est équivalente à la donnée d'un module sur son algèbre de groupe $\mathbb{C}[G]$.

Pour des raisons techniques, nous devons rajouter la condition suivante :

Hypothèse. *Le groupe G est supposé unimodulaire.*

Une mesure de Haar à gauche étant aussi invariant à droite (et réciproquement), cela simplifie les changements de variable dans les intégrales.

Fixons une mesure de Haar μ sur G. On définit la *convolution* de deux fonctions f_1, f_2 dans $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ par

$$f_1 \star f_2(g) = \int_G f_1(x) f_2(x^{-1}g) d\mu(g) \ , \ g \in G \ .$$

On montre facilement (**exercice !**) que $f_1 \star f_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, que le produit ainsi défini est distributif par rapport à l'addition, compatible avec la multiplication par un scalaire complexe et surtout *associatif* (cf. [BH], page 33). On obtient donc une $\mathbb{C}$-algèbre associative

$$\mathcal{H}(G) = (\mathcal{C}_c^\infty(G), +, \star) \ .$$

Soit K un sous-groupe ouvert compact de G. On définit un élément e_K de $\mathcal{H}(G)$ par

$$e_K(g) = \begin{cases} \mu(K)^{-1} & \text{si } g \in K \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme. 1) *Soient f_1, $f_2 \in \mathcal{H}(G)$. Alors*

$$\mathrm{Supp}\,(f_1 \star f_2) \subset \mathrm{Supp}\,(f_1).\mathrm{Supp}\,(f_2) \ .$$

2) *Pour tout K sous-groupe compact ouvert, e_K est un idempotent de $\mathcal{H}(G)$: $e_K \star e_K = e_K$.*

Preuve. 1) Immédiat.

2) D'après 1), on a Supp $(e_K \star e_K) \subset K$. D'autre part si $g \in K$, on a :

$$e_K \star e_K(g) = \mu(K)^{-2} \int_K f_1(x) f_2(x^{-1}g) d\mu(g) = \mu(K)^{-2} \int_K 1.d\mu(g) = e_K(g) \ .$$

Si G est fini, ou plus généralement discret, alors on peut prendre $K = \{1_G\}$ et dans ce cas 1_G est l'élément neutre de $\mathcal{H}(G)$. Mais en général, $\mathcal{H}(G)$ ne possède pas d'élément neutre.

Par contre lorsque K parcourt un base de voisinages ouverts de 1_G, les e_K dont d'autant bonnes approximations d'une unité que les K sont petits. On peut formaliser cette idée de la façon suivante.

Proposition ([BH], page 34). 1) *Une fonction $f \in \mathcal{H}(G)$ vérifie $e_K \star f = f$ (resp. vérifie $f \star e_K = f$) si et seulement si f est invariant par K à gauche (resp. à droite.*
2) *L'espace $e_K \star \mathcal{H}(G) \star e_K$, formé des fonctions bi-invariantes par K, est une sous-algèbre de $\mathcal{H}(G)$, d'élément unité e_K.*
3) *On a*

$$\mathcal{H}(G) = \bigcup_K e_K \star \mathcal{H}(G) \star e_K$$

où K décrit n'importe quel système de voisinages compacts et ouverts de 1_G.

Traditionnellement, on note $e_K \star \mathcal{H}(G) \star e_K = \mathcal{H}(G, K)$, ou encore $\mathcal{H}(K \backslash G/K)$. Ainsi

$$\mathcal{H}(G, K) = \{f \in \mathcal{H}(G) \ ; \ f(k_1 g k_2) = f(g), \text{ pour tous } k_1, k_2 \in K\} \ .$$

Définition. *Un $\mathcal{H}(G)$-module est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel M, muni d'un action de $\mathcal{H}(G)$, notée*

$$\mathcal{H}(G) \times M \longrightarrow M \ , \ (f, m) \mapsto f \star m$$

qui est linéaire en f et en m et vérifie $f_1 \star (f_2 \star m) = (f_1 \star f_2) \star m$, $m \in M$, $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(G)$.

Un $\mathcal{H}$-module M est dit lisse si $M = \mathcal{H}(G) \star m$, c'est-à-dire si tout $m \in M$ peut s'écrire

$$m = \sum_{i=1,\dots,n} \lambda_i m_i \star f_i$$

pour un certain n, des scalaires λ_i et des éléments $m_i \in M$.

Lemme. *Un $\mathcal{H}(G)$-module est lisse si et seulement si pour tout $m \in M$, il existe K, sous-groupe compact ouvert de G, tel que $e_K \star m = m$.*

Un *morphisme* de $\mathcal{H}$-modules entre deux modules M_1 et M_2 est une application linéaire $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ telle que pour tout $f \in \mathcal{H}(G)$, $\varphi(f \star m) = f \star (\varphi(m))$. On note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(G)}(M_1, M_2)$ l'espace vectoriel des morphismes de M_1 dans M_2. De façon évidente, les modules lisses sur $\mathcal{H}(G)$ forment une *catégorie* que l'on note $\mathcal{H}(G)$-Mod.

Nous allons décrire deux processus (appelés *foncteurs*) qui permettent :

a) à toute représentation lisse de G, d'associer un $\mathcal{H}(G)$-module lisse ;
b) réciproquement à tout $\mathcal{H}(G)$-module lisse, d'associer une représentation lisse.

Les espaces vectoriels sous-jacents resteront les mêmes dans les deux cas.

Des représentations lisses vers les $\mathcal{H}(G)$-modules lisses.

Partons d'une représentation lisse (π, V) de G. On lui associe un $\mathcal{H}(G)$-module M de la façon suivante. D'abord $M = V$ comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel. L'action de $\mathcal{H}(G)$ sur V est donnée par

$$f \star v = \int_G f(g)\pi(g) v d\mu(g) \ , \ f \in \mathcal{H}(G), \ v \in V \ .$$

Nous intégrons ici la fonction $G \longrightarrow V$, $g \mapsto f(g)\pi(g)v$ qui est localement constante et à support compact. concrètement si K est un sous-groupe compact ouvert qui fixe à la fois f (à droite) et v, on a

$$f \star v = \mu(K) \sum_{G/K} f(g)\pi(g)v \ .$$

La somme sur l'ensemble discret G/K est en fait finie.

Remarque. A $f \star v$, on préfère la notation plus traditionnelle $\pi(f)v$.

Proposition. ([BH] pages 35/36)*L'opération* $(f, v) \mapsto \pi(f)v$ *fait de* V *un* $\mathcal{H}$*-module lisse. Si* (π', V') *est une autre représentation lisse et si* $\varphi : V \longrightarrow V'$ *est un* G*-homomorphisme, alors* φ *est aussi un* $\mathcal{H}(G)$*-homomorphisme :*

$$\varphi \circ \pi(f) = \pi'(f) \circ \varphi \ , \ f \in \mathcal{H}(G) \ .$$

Exercice. *Notons* $(\pi, V) = (\lambda, \mathcal{H}(G))$ *la représentation de* G *par translation à gauche sur les fonctions de* $\mathcal{H}(G)$*. Montrer que si* $g \in \mathcal{H}(G)$*, alors* $\lambda(g)f = g \star f$*.*

Des $\mathcal{H}(G)$*-modules vers les représentations lisses de* G*.*

Proposition ([BH], pages 36/37) *Soit* M *un* $\mathcal{H}(G)$*-module lisse. Il existe une unique représentation lisse* (π, M) *de* G *dans* M *telle que* M *provienne de* (π, M) *par le procédé décrit précédemment.*

Concrètement la représentation π est donnée comme suit. Soit $m \in M$ et $g \in G$. Soit K un sous-groupe compact ouvert tel que $e_K \star m = m$. On définit alors

$$\pi(g).m = \mu(K)^{-1} f \star m$$

où f est la fonction caractéristique de gK.

Lemme. *Soit* (π, V) *une représentation lisse de* V*. Alors l'opérateur* $\pi(e_K) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ *est la projection sur* V^K *se noyau* $V(K) = \mathrm{Vect}\{v - \pi(k)v \ ; \ v \in V, \ k \in K\}$*.*

Preuve. En effet, à un facteur de normalisation près, $\pi(e_K)$ est le projecteur $p : V \longrightarrow V^K$ que nous avions construit dans la section B.

Il s'ensuit que si K est un sous-groupe compact ouvert $V^K = e_K \star V = \pi(e_K)V$ est un module à gauche sur $e_K \star \mathcal{H}(G) \star e_K = \mathcal{H}(G, K)$. On peut alors espérer que si V^K n'est pas nul, la structure du $\mathcal{H}(G, K)$-module V^K donne des renseignements sur la structure du G-module V. C'est effectivement le cas.

Proposition ([BH], page 38).

(1) *Si* (π, V) *est une représentation lisse irréductible de* G*, alors* V^K*, s'il n'est pas nul, est un* $\mathcal{H}(G, K)$*-module simple (au sens ou il ne possède pas de sous-module propre stable sous l'action de* $\mathcal{H}(G, K)$*).*

(2) *Le procédé* $(\pi, V) \mapsto V^K$ *induit une bijection entre les deux ensembles suivants :*

(a) *les classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles* (π, V) *de* G *telles que* $V^K \neq 0$ *;*

(b) *les classes d'imorphismes de* $\mathcal{H}(G, K)$*-modules simples.*

Preuve. Nous admettrons le partie (2) de la proposition. Soit (π, V) une représentation lisse irreductible de G telle que $V^K \neq 0$. Soit $0 \neq M \subset V^K$ un sous-$\mathcal{H}(G, K)$-module de M. Nous devons prouver que $M = V^K$. Puisque V est irreductible, on a $V = \pi(\mathcal{H}(G)).M$. On tire alors :

$$V^K = \pi(e_K)V = \pi(e_K)\pi(\mathcal{H}(G))M = \pi(e_K)\pi(\mathcal{H}(G))\pi(e_K)M = \pi(\mathcal{H}(G, K))M = M \ .$$

D'où le résultat.

Corollaire *Soit* (π, V) *une représentation lisse non triviale de* G*. Alors* (π, V) *est irreductible si et seulement si, pour tout sous-groupe ouvert compact de* G*, l'espace* V^K *est soit nul, soit un* $\mathcal{H}(G, K)$*-module simple.*

Preuve. Une implication découle de la proposition précédente. Réciproquement, supposons que (π, V) n'est pas irréductible. Il existe un sous-espace propre $0 \neq U \subsetneq V$ qui est G-stable. Posons $W = V/U \neq 0$. Par lissité,on peut trouver un sous-groupe ouvert compact K tel qu'à la fois $U^K \neq 0$ et $W^K \neq 0$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow W \longrightarrow 0$$

ont tire la suite exacte de $\mathcal{H}(G, K)$-modules

$$0 \longrightarrow U^K \longrightarrow V^K \longrightarrow W^K \longrightarrow 0$$

Ceci prouve que U^K est un sous-$\mathcal{H}(G, K)$-module propre de V^K, qui ne peut alors pas être simple. Contradiction.

Nous allons appliquer ces résultat à une classe très particulière de représentations qui ont un importance considérable dans le programme de Langlands : les représentations dites *sphériques* de $\mathrm{GL}(2, F)$.

Une représentation lisse irréductible de $G = \mathrm{GL}(2, F)$ est dite *sphérique* si elle possède un vecteur fixe non nul sous le groupe $K = \mathrm{GL}(2, \mathfrak{o})$. D'après les résultats précédents, les classes d'équivalence de représentations sphériques irréductibles sont en bijection avec les classes d'équivalence de $\mathcal{H}(G, K)$-modules simples. Nous allons étudier ces derniers et pour ce faire déterminer la structure de l'algèbre $\mathcal{H}(G, K)$.

Hypothèse. *Nous normalisons le produit de convolution en fixant la mesure de Haar par la condition* $\mu(K) = 1$.

D'après la décomposition de Cartan

$$G = \coprod_{n \geqslant m} K \begin{pmatrix} \varpi^n & 0 \\ 0 & \varpi^m \end{pmatrix} K$$

le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}(G,K)$ admet pour base l'ensemble des fonctions caractéristiques :

$$\mathbf{1}_{K\begin{pmatrix} \varpi^n & 0 \\ 0 & \varpi^m \end{pmatrix}K} \ , \ n, m \in \mathbb{Z},\ n \geqslant m \ .$$

Il est donc de dimension infinie dénombrable.

Pour $k \geqslant 0$, soit T_k la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\{g \in \mathrm{M}(2, \mathfrak{o}) \ ; \ v_F(\det(g)) = k\}$$

et notons R la fonction caractéristique de $K \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} = \varpi K = K\varpi$.

Proposition. *Si $k \geqslant 1$, on a :*

$$T_1 \star T_k = T_{k+1} + qR \star T_{k-1} \ .$$

Preuve. Remarquons que, le support d'une convolée étant contenu dans le produit des supports, les trois fonctions $T_1 \star T_k$, t_{k+1} et $qR \star T_{k-1}$ ont chacune leur support contenu dans

$$\{g \in \mathrm{M}(2, \mathfrak{o}) \ ; \ v_F(\det(g)) = k+1\} = \coprod_{n \geqslant m \geqslant 0\ ,\ n+m=k+1} K \begin{pmatrix} \varpi^n & 0 \\ 0 & \varpi^m \end{pmatrix} K$$

$$\subset \coprod_{m=0,\dots,k+1} K \begin{pmatrix} \varpi^{k+1-m} & 0 \\ 0 & \varpi^m \end{pmatrix} K \ .$$

Il suffit donc de tester l'égaliter de la proposition sur les éléments :

$$\begin{pmatrix} \varpi^{k+1-m} & 0 \\ 0 & \varpi^m \end{pmatrix} \ , \ m = 0, \dots, k+1 \ .$$

Nous avons besoin du résultat suivant.

Lemme. *On a la réunion disjointe :*

$$K \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} K \coprod \coprod_{\beta \bmod \mathfrak{p}} \begin{pmatrix} \varpi & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K$$

où dans la réunion disjointe β décrit un système de représentants de $\mathfrak{o}$ modulo $\mathfrak{p}$.

En effet, par un argument de compacité la double classe $K \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K$ est une réunion finie de classes à droite modulo K. Par la décomposition d'Iwasawa, on a donc :

$$K \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K = \coprod_{\text{finie}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} K \ .$$

En regardant le déterminant, on trouve $v(\alpha\gamma)=1$ et on peut donc se ramener à $(\alpha,\gamma)=(\varpi,1)$ ou bien $(\alpha,\gamma)=(1,\varpi)$. Dans le second cas, puisque $\beta\in\mathfrak{o}$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} K$$

On a égalité de deux classes $\begin{pmatrix} \varpi & \beta_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K$, $i=1,2$, si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \beta_2 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta_2-\beta_1}{\varpi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K$$

c'est-à-dire $\beta_1\equiv\beta_2$ *modulo* $\mathfrak{p}$.

Finalement, il ne peut y avoir d'autres égalités de classes en regardant la valuation des coefficients des matrices.

Reprenons la démonstration de la proposition. Pour $g\in G$, on a

$$T_1\star T_k(g)=\int_G T_1(h)T_k(h^{-1}g)dh=\int_{K\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}K} T_k(h^{-1}g)$$

$$=\int_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}K} T_k(h^{-1}g)dh+\sum_{\beta \bmod \mathfrak{p}}\int_{\begin{pmatrix} \varpi & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}K} T_k(h^{-1}g)dh.$$

En utilisant que T_k est invariant à gauche par K, on obtient :

$$T_1\star T_k(g)=\mu(K)\Big(\,T_k\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{pmatrix}g\Big)+\sum_{\beta \bmod \mathfrak{p}} T_k\Big(\begin{pmatrix} \varpi & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}g\Big)\,\Big)\;.$$

On en déduit la formule suivante :

$$T_1\star T_k\begin{pmatrix} \varpi^{k+1-m} & 0 \\ 0 & \varpi^m \end{pmatrix}=\begin{cases} 1 & \text{si } m=0 \text{ ou } k+1 \\ q+1 & \text{si } 1\leqslant m\leqslant k \end{cases}$$

D'un autre côté, il est immédiat que :

$$T_{k+1}\begin{pmatrix} \varpi^{k+1-m} & 0 \\ 0 & \varpi^m \end{pmatrix}=1\;,\;0\geqslant m\geqslant k+1$$

et

$$qR\star T_{k-1}\begin{pmatrix} \varpi^{k+1-m} & 0 \\ 0 & \varpi^m \end{pmatrix}=\begin{cases} 0 & \text{si } m=0 \text{ ou } k+1 \\ q & \text{si } 1\leqslant m\leqslant k \end{cases}$$

L'égalité de la proposition en découle.

Proposition. *L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,K)$ est engendrée par T_1, R et R^{-1}.*

Preuve. Une base de $\mathcal{H}(G,K)$ est formée des

$$E_{n,m}=\mathbf{1}_{K\begin{pmatrix} \varpi^n & 0 \\ 0 & \varpi^n \end{pmatrix}}\;,\;n\geqslant m\in\mathbb{Z}\;.$$

On a $E_{n,m} = R^m E_{n-m,1}$ (égalité facile : exercice) et $E_{n-m,1} = T_{n-m} - R \star T_{n-m-1}$ (exercice encore !). Il suffit donc de montrer que l'algèbre engendrée par T_1 et R contient T_k pour tout $k \geqslant 0$. Or ceci se montre par une récurrence immédiate basée sur l'identité de la proposition précédente.

Corollaire. 1) *L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,K)$ est commutative et de type fini.*
2) *Tout $\mathcal{H}(G,K)$-module simple est de dimension* 1.

Preuve. 1) L'algèbre de Hecke est de type finie par la proposition précédente. Elle est commutative car T_1 et R commutent :

$$R \star T_1 = T_1 \star R = E_{2,1} \ .$$

2) Ce point découle du résultat général suivant :

Lemme. *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre commutative de type fini. Alors tout $\mathcal{A}$-module simple V est de dimension* 1 *sur* $\mathbb{C}$.

En effet, on peut écrire $\mathcal{A} = \mathbb{C}[X_1, ..., X_r]/I$, où I est un idéal de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_r]$ et $r \geqslant 0$ un entier. Le module simple V est isomorphe à A/J, où J est un idéal maximal de A. Il s'écrit M/I, où M est un idéal maximal de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_r]$ contenant I. On a donc

$$V \simeq \mathbb{C}[X_1, ..., X_r]/M \simeq \mathbb{C}$$

car tout idéal maximal de $\mathbb{C}[X_1, ..., X_r]$ est de la forme $(X-a_1, ..., X-a_r)$, où $(a_1, ..., a_r) \in \mathbb{C}^r$. D'où le Lemme et le Corollaire.

Donc se donner une classe d'équivalence de modules simples sur $\mathcal{H}(G,K)$, revient à se donner un caractère $\chi : \mathcal{H}(G,K) \longrightarrow \mathbb{C}$. Celui-ci est entièrement déterminé par les deux nombres $\chi(R) \in \mathbb{C}^\times$ et $\chi(T_1) \in \mathbb{C}$. La classe d'isomorphie d'une représentation sphérique irréductible de G est donc fixée par un élément de $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$. Nous verrons comment ces invariants sont reliés à d'autres données lorsque nous écrirons les représentations sphériques comme des éléments de la série principale.

E. Modules de Jacquet et représentations induites

Les représentations considérées dans ce chapitre seront des représentations lisses du groupe $G = \mathrm{GL}(2, F)$ et aussi de certains de ses sous-groupes. Toutes les représentations seront supposées *lisses* même si cette hypothèse n'est pas explicite. Notre but ici est de scinder les représentations irréductibles de G en deux classes :

– celles qui sont reliées au représentations du groupe diagonal T, appelées les représentations de *la série principale*.

– les autres, appelées *supercuspidales* ou *cuspidales*.

On considère toujours les sous-groupes standard suivant : le groupe des matrices diagonales T, contenu dans le groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures B, qui se décompose en le produit semidirect $B = TN$, N distingué dans B, où N est le sous-groupe des matrices unipotentes supérieures.

Soit (π, V) une représentation de G. On note $V(N)$ le sous-espace de V engendré par les vecteurs $v - \pi(n)v$, $v \in V$, $n \in N$. On montre que $V_N = V/V(N)$ est le plus gros quotient de V sur lequel G agit trivialement (**exercice !**). Le sous-espace $V(N)$ est invariant par l'action de B : si $b \in B$, $n \in N$, $v \in V$, on a

$$\pi(b)[v - \pi(n)v] = [\pi(b)v] - \pi(bnb^{-1})[\pi(b)v] \in V(N) \ .$$

Il s'ensuit que B, donc $T = B/N$ agit sur le quotient V_N. L'espave V_N, en tant que représentation lisse de T, s'appelle le *module de Jacquet de V relativement à N*. On le note (π_N, V_N).

En notant $\mathrm{Rep}(G)$ (resp. $\mathrm{Rep}(T)$) la catégorie des représentations lisses de G (resp. de T), le procédé

$$\mathrm{Rep}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}(T) \ , \ (\pi, V) \mapsto (\pi_N, V_N)$$

est fonctoriel. En effet si $\varphi : (\pi, V) \longrightarrow (\sigma, V)$ est un G-opérateur d'entrelacement, il envoie $V(N)$ dans $W(N)$ et induit par passage au quotient un T-opérateur d'entrelacement $\varphi_N : (\pi_N, V_N) \longrightarrow (\sigma_N, W_N)$. Les détails sont laissés au lecteur en **exercice**.

Lemme. *Le foncteur $\pi \longrightarrow \pi_N$ est exact et additif.*

Preuve. **Exercice**.

Dans la direction opposée, nous allons produire un foncteur de $\mathrm{Rep}(T)$ dans $\mathrm{Rep}(G)$. Soit (σ, W) une représentation de T. On peut la regarder comme une représentation de B triviale sur N et former la représentation $\mathrm{Ind}_B^G \sigma$. Noter que puisque le quotient G/B est compact, on a l'égalité $\mathrm{Ind}_B^G \sigma = \text{c-}\mathrm{Ind}_B^G \sigma$. Cette représentation s'appelle *l'induite parabolique* de σ (relativement à B, ou à N).

Soit à présent (π, V) une représentation de G. Par la réciprocité de Frobenius, on a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels :

$$\mathrm{Hom}_G\,(\pi, \mathrm{Ind}_B^G\,\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_B(\pi, \sigma)\ .$$

Cependant, la représentation σ étant triviale sur N, tout B-opérateur d'entrelacement $\pi \mapsto \sigma$ se factorise à travers l'application quotient $\pi \mapsto \pi_N$, on obtient donc un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_G\,(\pi, \mathrm{Ind}_B^G\,\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_T(\pi_N, \sigma)\ .$$

Cette isomorphisme d'appelle *la Réciprocité de Frobenius pour l'induction parabolique.* Il a la conséquence suivante.

Théorème. *Soit (π, V) une représentation irréductible de G. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Le module de Jacquet V_N est non-trivial.*

(2) *La représentation π est isomorphe à une sous-représentation d'une induite parabolique $\mathrm{Ind}_B^G\,\chi$, pour un caractère χ de T.*

Preuve. (2) $\implies$ (1). Supposons que (2) soit vraie. Par la réciprocité de Frobenius pour l'induction parabolique, on a

$$\mathrm{Hom}_T\,(\pi_N, \chi) \simeq \mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_B^G\,\chi) \neq 0$$

et forcément $\pi_N \neq 0$.

(1) $\implies$ (2). Nous allons d'abord montrer que V_N, comme représentation de T, est de type fini, c'est-à-dire engendrée par un nombre fini d'éléments. Soit $v \in V$ non nul. Puisque V est irréductible, elle est engendrée comme $\mathbb{C}$-espave vectoriel par les translatés, $\pi(g)v$, $g \in G$. Par lissité v est fixé par un sous-groupe d'indice fini K' de K. Soient $\{k_1, ..., k_r\}$ un système de représentants de K/K'. Grâce à la décomposition d'Iwasawa $G = BK$, on a que V, comme représentation de B, est engendrée par les $\pi(k_i)v$, $i = 1, ..., r$. Donc le quotient $V_N = V/V(N)$ est engendré, comme représentation de T, par les images des $\pi(k_i)$. D'où le résultat annoncé.

On remarque ensuite que puisque V_N est de type fini comme représentation de T, il possède un quotient irréductible. En effet soit $\{u_1, ..., u_t\}$ un système de générateurs de taille minimale de V_N comme représentation de T. Soit U une sous-T-représentation de V_N contenant $u_1, ..., u_{t-1}$ et non u_t et maximale pour cette propriété (elle existe par le Lemme de Zorn, voir Annexe). Alors le quotient V_N/U est irréductible c'est donc un caractère puisque T est abélien. En effet si V_N/U n'était pas irréductible, il possèderait un sous-espace invariant et propre W/U. Puisque u_t modulo U doit engendrer V_N/U, on ne peut pas avoir $u_t \in W$, ce qui contredit la maximalité de U. Notons (D, χ) ce caractère ($D = V_N/U$ est une droite vectorielle).

Par construction $\mathrm{Hom}_T(V_N, \chi) \neq 0$. Donc par réciprocité de Frobenius pour l'induction parabolique, on a $\mathrm{Hom}_G(\pi, \mathrm{Ind}_B^G\,\chi) \neq 0$, ce qui, puisque π est irréductible, signifie qu'elle est isomorphe à une sous-représentation de $\mathrm{Ind}_B^G\,\chi$. CQFD.

Terminologie. Si (π, V) est une représentation irréductible de G, on dit que :

– π est *cuspidale* si $V_N = 0$.

– π appartient à la *série principale* si $V_N \neq 0$.

Nous allons décrire les induites $\mathrm{Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2$ sans démonstration, préférant nous intéresser d'avantage au représentations cuspidales.

Une représentation (π, V) de G est dite de *longueur finie* si il existe une suite de sous-G-modules $V_0 = 0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_l = V$, telle que pour $i = 1, ..., l$, le quotient V_i/V_{i-1} est irréductible. On admettra que l'entier l ne dépend pas de la suite (V_i) choisie. On l'appellera la *longueur* de (π, V). Les classes d'isomorphie des V_i/V_{i-1} et les multiplicités avec lesquelles elles apparaissent ne dépendent que de la classe d'isomorphie de (π, V). Ce sont les *sous-quotients irréductibles* ou encore *les facteurs de composition* de (π, V).

Théorème I. ([BH], section 9, page 61 et suivantes). *Soit* $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ *un caractère lisse de* T*. Posons* $(\Sigma, X) = \mathrm{Ind}_B^G \chi$.

(1) *La représentation* (Σ, X) *est réductible si et seulement si* $\chi_1\chi_2^{-1} \equiv 1$*, ou bien* $\chi_1\chi_2^{-1}(x) = |x|_F^2$*,* $x \in F^\times$.

(2) *Supposons que* (Σ, X) *soit réductible. Alors :*

(a) (σ, X) *est de longueur finie* 2.

(b) *Un facteur de composition de* X *est de dimension* 1*, l'autre est de dimension infinie*

(c) X *possède un sous-*G*-module de dimension* 1 *si et seulement si* $\chi_1 = \chi_2$.

(d) X *possède un sous-*G*-module irréductible de dimension infinie si et seulement si* $\chi_1\chi_2^{-1}(x) = |x|_F^2$*,* $x \in F^\times$.

Théorème II (voir *loc. cit.*). *Soient* $\chi_1 \otimes \chi_2$ *et* $\xi_1 \otimes \xi_2$ *deux caractères lisses de* T*. Alors les représentations* $\mathrm{Ind}_B^G \chi$ *et* $\mathrm{Ind}_B^G \xi$ *sont isomorphes si et seulement si* $\chi_i = \xi_i$*,* $i = 1, 2$*, ou bien si* $\xi_1(x) = \chi_2(x)|x|_F$ *et* $\xi_2(x) = \chi_1(x)|x|_F^{-1}$*. Dans ce cas l'espace d'entrelacement* $\mathrm{Hom}_G\,(\mathrm{Ind}_B^G \chi, \mathrm{Ind}_B^G \xi)$ *est de dimension* 1.

Nous allons détailler le point (2) du Théorème I. Pour cela nous introduisons la torsion d'une représentation par un caractère.

Soient Γ un groupe quelconque (π, V) une représentation de Γ et φ un caractère de Γ, c'est-à-dire un élément de $\mathrm{Hom}\,(\Gamma, \mathbb{C}^\times)$. On note $\varphi\pi$, ou encore $\varphi \otimes \pi$, et on appelle *tordue de* π *par* φ, la représentation de Γ dans V donnée par $(\varphi\pi)(\gamma) = \varphi(\gamma)\pi(\gamma)$. Si Γ est localement profini et si φ et π sont lisses, alors $\varphi\pi$ est lisse. Lorsque ϕ est un caractère lisse de $F^\times$ et lorsque π est un représentation de $\mathrm{GL}(2, F)$, , on utilise l'abreviation $\varphi \otimes \pi$ pour $(\varphi \circ \det) \otimes \pi$.

Lemme. *Soient* H *un sous-groupe fermé de* G*,* φ *un caractère lisse de* G *et* σ *une représentation lisse de* H*. On a alors des isomorphismes naturels :*

$$\varphi \otimes \mathrm{Ind}_H^G \sigma \simeq \mathrm{Ind}_H^G \left\{(\varphi_{|H}) \otimes \sigma\ \right\} \quad et \quad \varphi \otimes \text{c-}\mathrm{Ind}_H^G \sigma \simeq \text{c-}\mathrm{Ind}_H^G \left\{(\varphi_{|H}) \otimes \sigma\right\}\ .$$

Preuve. A faire en **exercice**.

Nous avons vu que lorsque $\chi \equiv 1$, la représentation $\mathrm{Ind}_B^G \chi = \mathrm{Ind}_B^G \mathbf{1}_B$ est de longueur 2, possède le caractère trivial comme sous-module et la représentation de Steinberg **St** comme quotient. Lorsque $\chi_1 = \chi_2 = \varphi$, on peut voir la représentation $\chi_1 \otimes \chi_2$ de T comme la restriction de $\varphi \circ \det$ à T. On a alors :

$$\mathrm{Ind}_B^G \varphi \otimes \varphi = \mathrm{Ind}_B^G \left\{(\varphi \circ \det)\mathbf{1}_B\right\} = \varphi \otimes \mathrm{Ind}_B^G \mathbf{1}_B \ .$$

On en déduit que $\mathrm{Ind}_B^G \varphi \otimes \varphi$ admet $\varphi \circ \det$ comme sous-représentation et $\varphi \otimes \mathbf{St}$ comme quotient.

De même la représentation $\mathrm{Ind}_B^G \varphi\delta_B^{-1}$ admet $\varphi \otimes \mathbf{St}$ comme sous-représentation irréductible et le caractère $\varphi \circ \det$ quotient. Pour la démonstration nous renvoyons à [BH].

Synthèse. *Les représentations irréductibles, lisses, non cuspidales de G sont :*

– *les caractères de la forme $\varphi \circ \det$,*

– *les tordues $\varphi \otimes \mathbf{St}$ de la représentations de Steinberg,*

– *les induites paraboliques irréductibles.*

Pour terminer ce chapitre, nous allons déterminer quelles représentations induites sont sphériques et les modules correspondants sur l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(G, K)$. Nous normalisons la mesure de Haar par $\mu(K) = 1$.

Nous avons vu que si (π, V) est irréductible et sphérique, alors V^K est de dimension 1. Les générateurs $R = \mathbf{1}_{\varpi K}$ et $T = T_1 = \mathbf{1}_{K\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}K}$ de $\mathcal{H}(G, K)$ agissent par des scalaires λ_R et λ_T sur V^K.

Le scalaire λ_R est facile à déterminer : c'est $\omega_\pi(\varpi)$, où ω_π est le caractère central de π (**exercice** !)

Il est facile de démontrer (exercice !) que le déterminant induit une application surjective de K dans $\mathfrak{o}^\times$. En particulier un caractère $\varphi \circ \det$ est sphérique si et seulement si φ est *non ramifié, i.e.* $\varphi_{|\mathfrak{o}^\times} \equiv 1$.

Lemme. *Si φ est un caractère non ramifié de $F^\times$ et si $\pi = \varphi \circ \det$, alors $\lambda_T = (q+1)\varphi(\varpi)$ et $\lambda_R = \varphi(\varpi)^2$.*

En effet, la valeur de λ_R vient de ce que le caractère central de la représentation est $\varphi \circ \det$. Soit v un vecteur non nul de la droite sur laquelle π agit. On a

$$\begin{aligned}\pi(T).v = \int_G f(x)\pi(x).v dx = \int_{K\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}K} \pi(x).v dx = \int_{K\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}K} \pi\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.v \\ = \varphi(\varpi)\mu(K\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}K)\end{aligned}$$

Or on a vu que $K\begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}K$ se décompose en $q+1$ doubles classes à droite selon K, de sorte que sa mesure est $q+1$. D'où le résutat.

Lemme. *Les représentations $\varphi\mathbf{St}$ ne sont jamais sphériques.*

En effet, commençons par noter que $\varphi\mathbf{St} = \mathrm{Ind}_B^G \varphi \circ \det / V_0$, où V_0 est l'unique sous-espace de l'induite isomorphe au caractère $\varphi \circ \det$. On a donc

$$(\varphi\mathbf{St})^K = (\mathrm{Ind}_B^G \varphi \circ \det)^K / (V_0)^K \ .$$

Un fonction non nulle $f \in (\mathrm{Ind}_B^G \varphi \circ \det)^K$ doit vérifier $f(xk) = f(x)$, $k \in K$ et $f(bx) = \varphi(\det(x))f(x)$. A cause de la décomposition d'Iwasawa $G = BK$, on peut écrire tout x dans G sous la forme bk, $b \in B$, $k \in K$, ce qui donne : $f(bk) = \varphi(\det(b))f(1)$ et $\varphi(\det(b)) = 1$ pour tout $b \in B \cap K$. Ceci entraîne que φ doit être non ramifié pour avoir $(\mathrm{Ind}_B^G \varphi \circ \det)^K \neq 0$. Mais on en déduit alors que dans ce cas $f(x) = \varphi(\det(x))f(1)$, pour tout $x \in G$. Or cette fonction engendre V_0 et appartient (forcément) à V_0^K. On obtient bien $(\varphi\mathbf{St})^K = 0$.

Il nous reste donc à étudier le cas d'une induite parabolique irréductible $\pi = \mathrm{Ind}_B^G \chi_1 \otimes \chi_2$.

Lemme. *Si π est la représentation irréductible $Ind_B^G \chi_1 \otimes \chi_2$, alors elle est sphérique si et seulement si χ_1 et χ_2 sont non ramifiés et, dans ce cas, on a $\lambda_R = \chi(\varpi)\chi_2(\varpi)$ et $\lambda_T = \chi_2(\varpi) + q\chi_1(\varpi)$.*

En effet une fonction non nulle f de l'espace de π est K-invariante si et seulement si $f(bk) = \chi(b)f(1)$ et $\chi(b) = 1$ si $b \in B \cap K$, où $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$. Une telle fonction existe si et seulement si χ_1 et χ_2 sont non ramifiés. Si c'est le cas considérons la fonction K-invariante f_0 fixée par la condition $f_0(1) = 1$.

Le caractère central de π étant $\chi_1\chi_2$, on a $\lambda_R = \chi_1(\varpi)\chi_2(\varpi)$.

Le scalaire λ_T est donné par $\lambda_T = (\pi(T)f_0)(1)$. On a

$$\pi(T).f_0 = \int_G T(x)\pi(x)f\,dx = \int_{KtK} \pi(x)f\,dx$$

où l'on a noté $t = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$(\pi(T).f_0)(1) = \int_{KtK} f(x)dx \ .$$

En utilisant la décomposition de KtK en classes) droite selon K, on obtient :

$$(\pi(T).f_0)(1) = \int_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} K} f_0(x)dx + \sum_{\beta \in \mathfrak{o}/\mathfrak{p}} \int_{\begin{pmatrix} \varpi & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} K} f_0(x)dx$$

$$= f_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} + \sum_{\beta \in \mathfrak{o}/\mathfrak{p}} f_0 \begin{pmatrix} \varpi & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \chi_2(\varpi) + q\chi_1(\varpi)$$

où l'on a utilisé l'invariance à droite de f_0 par K.

Corollaire. *Les représentations irréductibles sphériques de G sont les caractère $\varphi \circ \det$, où φ est non ramifié, et les représentation obtenues comme induites paraboliques de* *caractères non ramifiés. En particulier, les représentations cuspidales irréductibles ne sont pas sphériques.*

Preuve. Nous savons que les classes d'isomorphie de représentations sphériques irréductible sont en bijection avec les classes d'isomorphie de modules simples sur $\mathcal{H}(G, K)$. Pour cela il suffit de vérifier qu'avec les représentations sphériques déjà construites on a obtenus tous les caractères de $\mathcal{H}(G, K)$, c'est-à-dire toutes les valeurs possibles pour les couples $(\mu_R, \mu_T) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$. Or ceci découle du fait que pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$, le système au inconnues $(u, v) \in \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$, donné par

$$\begin{cases} uv & = & a \\ qu + v & = & b \end{cases}$$

possède toujours une solution.

F. Représentations cuspidales

Dans ce chapitre, nous établissons quelques propriétés des représentations cuspidales irréductibles. Leur construction sera faite aux chapitres suivants. Bien noter que jusqu'à présent, nous n'avons pas démontré qu'il existe des représentations cuspidales.

Soit (π, V) une représentation irréductible de $G = \mathrm{GL}(2, F)$. A chaque couple $(v, \check{v}) \in V \times \check{V}$, on associe la fonction $\gamma_{v,\check{v}} : G \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par

$$\gamma_{v,\check{v}}(g) = \langle \check{v}, \pi(g)v \rangle \ .$$

Par la lissité de G, cette fonction est localement constante. Notons $\mathcal{C}(G)$ l'ensemble des fonctions complexes localement constantes sur G. C'est une représentation lisse de $G \times G$, où l'action est donnée par

$$[(g, h).f](x) = f(g^{-1}xh) \ , \ g, h, x \in G \ .$$

Le sous-espace $\mathcal{C}(\pi)$ engendré par les fonctions $\gamma_{v,\check{v}}$, $(\check{v}, v) \in \check{V} \times V$ est stable par $G \times G$. L'application $\check{V} \times V \longrightarrow \mathrm{C}(\pi)$, $(\check{v}, v) \mapsto \gamma_{\check{v},v}$ est bilinéaire et se factorise donc en une application $\gamma : \check{V} \times V \longrightarrow \mathrm{C}(\pi)$ telle que $\gamma(\check{v} \otimes v) = \gamma_{\check{v},v}$.

Il est clair que la formule $(g, h).(\check{v}, v) = \check{\pi}(g)\check{v} \otimes \pi(h)v$ munit $\check{V} \times V$ d'une structure de $G \times G$-module lisse. Alors on a un opérateur d'entrelacement surjectif

$$\gamma \ : \ \check{V} \otimes V \longrightarrow \mathrm{C}(\pi) \ .$$

Les éléments de $\mathrm{C}(\pi)$ sont appelés les *coefficients*, ou encore *les coefficients matriciaux* de π (pourquoi ?). Si ω_π est le caractère central de π, il est clair que tout élément γ de $\mathrm{C}(\pi)$ vérifie

$$\gamma(zg) = \omega_\pi(z)\gamma(g) \ , z \in Z, \ g \in \mathrm{C}(\pi) \ .$$

Définition. *On dit que la représentation irréductible π est γ-cuspidale si tout ses coefficients sont à support compact modulo le centre Z.*

Proposition. (1) *Soit (π, V) une représentation irréductible et admissible qui possède un coefficient non nul à support compact. Alors (π, V) est γ-cuspidale.*
(2) *Toute représentation γ-cuspidale est admissible.*

Preuve. Nous admettrons le point (2) (voir [BH], pages 70 et 71), ainsi que le lemme suivant :

Lemme. *Soient U et W deux représentations lisses irréductibles de G. Alors $U \otimes W$ est une représentation irréductible de G.*
Remarque. Pour une preuve d'une forme beaucoup plus générale de ce lemme, le lecteur pourra consulter [Re], Proposition (III.1.14), page 78.

Puisque π est admissible, sa contragrédiente est irréductible. D'après le Lemme précédent, on a que $\check{V} \otimes V$ est une représentation irréductible de $G \times G$. Il s'ensuit que γ est un G-isomorphisme et que $\mathrm{C}(\pi)$ est irréductible comme $G \times G$-module.

Supposons que $0 \neq f_0 \in \mathrm{C}(\pi)$ est à support compact modulo Z. On voit alors facilement qu'il en est de même des combinaisons linéaires de fonctions de la forme $(g, h).f_0$, et donc de tout élément de $\mathrm{C}(\pi)$. CQFD.

Théorème. *Soit (π, V) une représentation irréductible de G. Alors (π, V) est cuspidale si et seulement si elle est γ-cuspidale. En conséquence :*

– une représentation irréductible est cuspidale si et seulement si elle possède un coefficient non nul à support compact modulo Z ;

– une représentation cuspidale irréductible est admissible.

Nous aurons besoin du résultat du résultat suivant.

Lemme. *Soit (π, V) une représentation lisse de G. Alors un vecteur $v \in V$ appartient à $V(N) = \mathrm{Vect}\{\pi(n)w - w \ ; \ n \in N, \ w \in V\}$ si et seulement si il existe un sous-groupe ouvert compact N_0 de N tel que*

$$\int_{N_0} \pi(n)v \, d\mu_N(n) = 0 \ .$$

Preuve. Le groupe $N \simeq (F, +)$ est réunion d'une suite croissante de sous-groupes compacts et ouverts. Donc si

$$v = \sum_{i=1,\ldots,r} v_i - \pi(n_i)v_i \in V(N)$$

il existe un sous-groupe compact N_0 de N qui contient tous les N_i. L'identité du Lemme en découle immédiatement.

Réciproquement, soit $v \in V$ vérifiant l'identité du Lemme. Il existe un sous-groupe ouvert (normal) N_1 de N_0 tel que $v \in V^{N_1}$. On a

$$0 = \int_{N_0} \pi(n)v \, dn = \sum_{n_i \in N_0/N_1} \int_{n_i N_1} \pi(n)v \, dn$$

soit encore

$$0 = \mu(N_1) \sum_{n_i \in N_0/N_1} \pi(n_i)v \in V^{N_0} \ .$$

On en déduit que v est dans le noyau de la projection canonique de V^{N_1} sur V^{N_0}, qui est

$$V^{N_1}(N_0/N_1) = \mathrm{Vect}\{\pi(n)w - w \ ; \ n \in N_0/N_1, \ w \in V^{N_1}\} \subset V(N) \ .$$

CQFD.

Revenons à la démonstration du Théorème en supposant d'abord que π est cuspidale. Soit ϖ une uniformisante de F et posons

$$t = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Par la décomposition d'Iwasawa, l'ensemble $T^+ = \{t^n \; ; \; n \geqslant 0\}$ est un système de représentants du double quotient $ZK\backslash G/K$.

Lemme. *Soient $v \in V$ et $\check{v} \in \check{V}$. Il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que pour $n \geqslant m$, on a $\gamma_{\check{v},v}(t^n) = 0$.*

Démonstration du Lemme. Fixons un sous-groupe compact ouvert N_1 de N qui fixe $\check{v}$. Puisque $V_N = 0$, on a $v \in V(N)$ de sorte qu'il existe un sous-groupe ouvert compact N_2 de N tel que

$$\int_{N_2} \pi(n)vdn = 0 \; .$$

On en déduit facilement que

$$\int_{N_0} \pi(n)vdn = 0$$

pour tout sous-groupe ouvert compact N_0 de N qui contient N_2. Or un petit calcul montre qu'il existe un entier m tel que $t^a N_2 t^{-a} \subset N_1$, pour tout $a \geqslant m$. Pour un tel a (et certaines constantes positives k_1 et k_2), on a

$$\langle \check{v}, \pi(t^a)v\rangle = k_1 \int_{N_1} \langle \check{\pi}(x^{-1})\check{v}, \pi(t^a)v\rangle dx$$

$$= k_1 \int_{N_1} \langle \check{\pi}(t^{-a})\check{v}, \pi(t^{-a}xt^a v\rangle dx = k_2 \int_{t^{-a}N_1t^a} \langle \check{\pi}(t^{-a})\check{v}, \pi(y)v\rangle dy$$

$$= k_2 \langle \check{\pi}(t^{-a})\check{v}, \int_{t^{-a}N_1t^a} \pi(y)dy\rangle = 0$$

CQFD.

Fixons un coefficient non nul $f = \gamma_{\check{v},v}$ de π. Soient à présent K' un sous-groupe ouvert normal de K qui fixe v et $\check{v}$, et $\{l_1, ..., l_r\}$ un système de représentants de K/K'. Pour $i, j \in \{1, ..., r\}$, fixons un entier m_{ij} tel que

$$\gamma_{\check{\pi}(l_i^{-1})\check{v}, \pi(l_j)v}(t^n) = 0 \text{ pour } n \geqslant m_{ij} \; .$$

Posons $M = \mathrm{Max}\{m_{ij} \; ; \; i, j = 1, ..., r\}$. Alors un calcul simple montre que $f_{ZKt^nK} \equiv 0$, pour $n \geqslant M$. On en déduit que le support de f est compact modulo Z.

Prouvons à présent la réciproque du Théorème. Pour cela nous avons besoin de deux lemmes. Pour $n \geqslant 1$, notons $K_n = I_2 + \mathfrak{p}^n\mathrm{M}(2, \mathfrak{o})$, le $n$ème groupe de congruence. Posons $T_n = K_n \cap T$, et pour $j \in \mathbb{Z}$, définissons :

$$N_j = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{p}^j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } N'_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^j & 1 \end{pmatrix} \; .$$

Lemme . *On a la décomposition dite d'Iwahori :*

$$K_n = N_n T_n N'_n \; .$$

Plus précisément, tout élément de K_n s'écrit de façon unique ntn', avec $n \in N_n$, $t \in T_n$ et $n' \in N'_n$.

Preuve. **Exercice.**

Il s'agit de montrer que tout $v \in V$ appartient à $V(N)$. Soit donc $v \in V$ et $n \geqslant 1$ tel que $\pi(K_n)$ fixe v. Pour chaque $\check{v} \in \check{V}^{K_n}$ la fonction $g \mapsto \langle \check{v}, \pi(g)v\rangle$ est à support compact. Donc pour $a \geqslant c_{\check{v}} \geqslant 0$, on a $\langle \check{v}, \pi(t^a)v\rangle = 0$. Puisque $\check{V}$ est de dimension finie, il existe $c \geqslant 0$, tel que pour tout $a \geqslant c$ et tout $\check{v} \in \check{V}$, on a $\langle \check{v}, \pi(t^a)v\rangle = 0$. Ceci entraîne que $\pi(e_{K_n})\pi(t^a)v = 0$, pour tout $a \geqslant c$.

Posons $K_n^{(a)} = t^{-a}K_n t^a = N_{n-a}T_nN'_{n+a}$. On a alors

$$0 = \pi(e_{K_n})\pi(t^a)v = \pi(t^a)\pi(e_{K_n^{(a)}})v$$

$$= \pi(t^a)\int_{N_{n-a}T_nN'_{n+a}} \pi(g)v\,dg = \mu_G(K_n \cap K_n^{(a)})\pi(t^a)\sum_{x\in N_{n-a}/N_n} \pi(x)\,v$$

$$= \frac{\mu_G(K_n \cap K_n^{(a)})}{\mu_N(N_n)}\pi(t^a)\int_N \pi(x)v\,dx\ .$$

On obtient bien le fait que $v \in V(N)$ et que π est cuspidale.

G. Induction et entrelacement

Le but de ce chapitre est de donner une condition nécessaire et suffisante sur une paire (K, ρ), formée d'un sous-groupe ouvert et compact modulo le centre de $G = \mathrm{GL}(2, F)$ et d'une représentation lisse irréductible ρ de K, pour que l'induite compacte $\text{c-Ind}_K^G \rho$ soit irréductible. C'est une variante du critère d'irréductibilité de Mackey utilisé dans la théorie des représentations des groupes finis. Nous montrons que lorsque l'induite est irréductible, elle est automatiquement cuspidale. Ceci fournit un procédé pour construire des représentations cuspidales et nous montrerons dans les chapitres suivants qu'elles sont toutes obtenues de cette façon.

Proposition (voir [BH], Proposition page 22). *Soit K un sous-groupe ouvert et compact modulo le centre de G et soit ρ une représentation lisse de K possédant un caractère central. Alors ρ est semisimple.*

Définition. *Soit (π, V) une représentation irréductible de G et K un sous-groupe ouvert et compact modulo le centre. Soit ρ une représentation lisse irréductible de K. On dit que π* contient *ρ, ou que ρ* apparaît dans *π si la représentation semisimple $\pi_{|K}$ contient ρ comme constituent irréductible, autrement dit si*

$$\mathrm{Hom}_K(\rho, \pi) \neq 0 \ .$$

Définition. *Pour $i = 1, 2$, soit K_i un sous-groupe ouvert, compact modulo le centre de G, et soit ρ_i une représentation lisse irréductible de K_i. On dit que $g \in G$* entrelace *ρ_1 avec ρ_2 si*

$$\mathrm{Hom}_{K_1^g \cap K_2}(\rho_1^g, \rho_2) \neq 0$$

où ρ_1^g désigne la représentation $x \mapsto \rho_1(gxg^{-1})$ du groupe $K_1^g := g^{-1}K_1 g$.

La condition de la définition signifie qu'il existe une application linéaire non nulle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$, où pour $i = 1, 2$, V_i désigne l'espace de ρ_i, telle que

$$f(\rho_1(gxg^{-1})v_1) = \rho_2(x)(f(v_1))$$

pour $v_1 \in V_1$ et $x \in g^{-1}K_1 g \cap K_2$.

Le fait suivant est fondamental.

Proposition. *Pour $i = 1, 2$, soit (K_i, ρ_i) une paire formée d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre et d'une représentation lisse irréductible. Supposons qu'une représentation lisse irréductible (π, V) de G contienne à la fois ρ_1 et ρ_2. Alors il existe une élément f de G qui entrelace ρ_1 avec ρ_2.*

Preuve. Pour chaque i, on peut décomposer V, comme représentation de K_i, comme somme directe de ses composantes isotypiques. L'hypothèse de la proposition s'écrit

$V^{\rho_1} \neq 0$ et $V^{\rho_2} \neq 0$. Puisque V est irréductible et que $V^{\rho_1} \neq 0$, les espaces $\pi(g^{-1})V^{\rho_1} = V^{\rho_1^g}$, $g \in G$, engendrent ρ. Soit $e_2 \in \mathrm{Hom}_{K_2}(V, V^{\rho_2})$ la projection canonique sur la composante isotypique selon ρ_2. Elle n'est pas nulle, donc il existe un g tel qu'elle ne s'annule pas sur $\pi(g^{-1})V^{\rho_1}$. Ceci entraîne que $f = e_2 \circ \pi(g^{-1})$ est un élément non nul de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^{\rho_1}, V^{\rho_2})$. Un calcul montre que

$$f \in \mathrm{Hom}_{K_1^g \cap K_2}\left((V^{\rho_1})^g, V^{\rho_2}\right)$$

où l'exposant g signifie que l'espace $V_1^{\rho_1}$ est muni de l'action π^g de K_1^g donnée par $\pi^g(y) = \pi(gyg^{-1})$. Cette espace d'entrelacement est donc non nul. Pour $i = 1, 2$, décomposons V^{ρ_i} comme une somme $\bigoplus_j V_i^j$ de K_i-modules tous isomorphes à ρ_i. On a alors :

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{K_1^g \cap K_2}\left((V_1^{\rho_1})^g, V_2^{\rho_2}\right) = \prod_{j,k} \mathrm{Hom}_{K_1^g \cap K_2}\left((V_1^j)^g, V_2^k\right)$$

et il existe donc des indices j, k tels que $\mathrm{Hom}_{K_1^g \cap K_2}\left((V_1^j)^g, V_2^k\right) \neq 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice. *Avec les notations précédentes, montrer que $g \in G$ entrelace ρ_1 avec ρ_2 si et seulement si g^{-1} entrelace ρ_2 avec ρ_1.*

La relation, définie par $(K_1, \rho_1)\, \mathcal{R}\, (K_2, \rho_2)$ si et seulement si il existe $g \in G$ tel que g entrelace ρ_1 avec ρ_2, est donc symétrique, réflexive. Prendre garde qu'elle n'est pas transitive pour une groupe G quelconque, et en particulier pour $\mathrm{GL}(2, F)$.

Langage.

(1) Si $(K_1, \rho_1)\, \mathcal{R}\, (K_2, \rho_2)$, on dira que *les paires (K_1, ρ_1) et (K_2, ρ_2) s'entrelacent dans G*.

(2) On dit que $g \in G$ entrelace (K, ρ) si il entrelace ρ avec lui-même.

(3) Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on appelera *paire* un couple (K, ρ) formé d'une sous-groupe compact modulo le centre et d'une représentation irréductible lisse ρ de K.

(4) *L'entrelacement* d'une paire (K, ρ) dans G et l'ensemble

$$I_G(\rho) = \{g \in G \ ; \ g \text{ entrelace } \rho \ \} \ .$$

Noter que l'on a toujours $K \subset I_G(\rho)$ (**exercice !**).

Soit (K, ρ) une paire telle que K contienne le centre Z de G. Notons W l'espace de ρ. On définit l'algèbre de Hecke *sphérique* $\mathcal{H}(G, \rho)$ de G relativement à ρ comme étant l'espace des fonctions $f : G \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ vérifiant :

(1) f est à support compact modulo le centre ;

(2) $f(k_1 g k_2) = \rho(k_1) \circ f(g)\rho(k_2)$, $k_1, k_2 \in K$, $g \in G$.

(Observons que les conditions (1) et (2) entraînent que f a un support contenu dans la réunion d'un nombre fini de doubles classes KgK).

On fixe une mesure de Haar μ sur G/Z et on définit la convolution de deux fonctions $f_1,\ f_2 \in \mathcal{H}(G,\rho)$, par

$$f_1 \star f_2(g) = \int_{G/Z} f_1(x) \circ f_2(x^{-1}g)\, d\mu(x)\ .$$

Noter que la fonction à intégrer est en réalité définie sur un représentant de x dans G mais ne dépend pas du choix de celui-ci.

Lorsque ρ est la représentation triviale de K, alors cette algèbre se confond avec $\mathcal{H}(G,K)$. On montrera en **exercice** que $\mathcal{H}(G,\rho)$ munie de la convolution des fonctions est une $\mathbb{C}$-algèbre associative avec une unité. On vérifiera à titre d'**exercice** que cette unité est la fonction f_0 dont le support est $K.1_G.K = K$ et qui est donnée par

$$f_0(k) = \frac{1}{\mu(K/Z)}\rho(k)\ .$$

Le résultat fondamental suivant fait le lien entre l'entrelacement et l'algèbre de Hecke sphérique.

Lemme. *Avec les notations précédentes, un élément $g \in G$ entrelace ρ si, et seulement si, il existe une fonction non nulle $f \in \mathcal{H}(G,\rho)$ à support dans KgK.*

Preuve. Fixons $g \in G$ et $\psi \in \mathrm{End}\,(W)$. L'application $f : KgK \longrightarrow \mathrm{End}\,(W)$, $kgk' \mapsto \rho(k) \circ \psi \circ \rho(k')$ est un élément de $\mathcal{H}(G,K)$ bien défini si et seulement si pour $k \in K^g \cap K$, on a $\psi \circ \rho(k) = \rho^g(k) \circ \psi$ (le vérifier !). Cette condition s'écrit encore $f \in \mathrm{Hom}_{K^g \cap K}\,(\rho, \rho^g)$. Puisque les représentations ρ et ρ^g de $K \cap K^g$ sont semisimples, les espaces $\mathrm{Hom}_{K^g\cap K}\,(\rho,\rho^g)$ et $\mathrm{Hom}_{K^g\cap K}\,(\rho^g,\rho)$ ont même dimension et le Lemme en découle.

Nous allons donner une interprétation de l'algèbre $\mathcal{H}(G,\rho)$ qui montre que sa structure est liée à celle de l'induite $(\pi, X) = \text{c-Ind}_K^G\,\rho$.

Rappelons que l'espave X est formé des fonctions $f : G \longrightarrow W$ qui sont à support compact modulo K (donc Z) et qui vérifient $f(kg) = \rho(k)f(g)$, $k \in K$, $g \in G$; le groupe G agissant par translation à droite.

Pour $\varphi \in \mathcal{H}(G,\rho)$ et $f \in X$, on définit $E_\varphi(f) = \varphi \star f$ comme étant la convolution

$$(\varphi \star f)(g) = \int_{G/Z} \varphi(x)\big(f(x^{-1}g)\big)\, d\mu(x)$$

On vérifie que $E_\varphi(f) \in X$ et que E_φ est un élément de $\mathrm{End}_G\,(X)$. On vérifie aisément qu'on a construit un morphisme d'algèbres :

$$E\ :\ \mathcal{H}(G,\rho) \longrightarrow \mathrm{End}_G\,(\text{c-Ind}_K^G\,\rho)\ .$$

Proposition. *Le morphisme*

$$E\ :\ \mathcal{H}(G,\rho) \longrightarrow \mathrm{End}_G\,(\textit{c-Ind}_K^G\,\rho)$$

est un isomorphisme.

Preuve. Celle-ci est plutôt formelle et le lecteur pourra se référer à [BH], page 80.

Lemme. *Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}(G,\rho)$ formé des fonctions à support dans K est $\mathbb{C}f_0$, où f_0 est l'identité de $\mathcal{H}(G,\rho)$.*

Preuve. Une inclusion est claire. Soit $f \in \mathcal{H}(G,\rho)$ à support dans K. On doit avoir

$$f(k) = \rho(k)f(1) = f(1)\rho(k) \ , \ k \in K$$

ce qui prouve que $f(1) \in \mathrm{End}_K(W)$, i.e. $f(1) \in \mathbb{C}\mathrm{Id}_W$, par le Lemme de Schur. La fonction f est donc bien un multiple de f_0.

Il découle du Lemme que si $I_G(\rho)$ est le plus petit possible, i.e. si $I_G(\rho) = K$, alors

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(G,\rho) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_K^G \rho) = 1 \ .$$

En général le fait que l'anneau des endomorphismes d'une représentation est égal à 1 n'entraîne pas que celle-ci est irréductible. Mais dans notre cas particulier, nous avons le résultat spectaculaire suivant.

Théorème. *Soit K un sous-groupe ouvert compact de $G = \mathrm{GL}(2,F)$ qui contient le centre Z et qui est compact modulo Z. Soit (ρ, W) une représentation lisse irréductible de K telle que :*

$$I_G(\rho) = K \ .$$

Alors l'induite compacte c-$\mathrm{Ind}_K^G \rho$ est irréductible et cuspidale.

Preuve. Montrons d'abord que $(\Sigma, X) = \text{c-Ind}_K^G \rho$ est irréductible. On vérifie facilement que le centre Z agit sur X via le caractère central ω_ρ de ρ (se souvenir que $K \supset Z$). On en déduit que X vu comme représentation de K est semisimple. Tout opérateur d'entrelacement dans $\mathrm{Hom}_K(W,X)$ a son image contenue dans la composante isotypique X^ρ. On a donc

$$\mathrm{Hom}_K(W, X^\rho) = \mathrm{Hom}_K(W,X) = \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G W, X) = \mathrm{End}_G(X)$$

où la deuxième "égalité" provient de la Réciprocité de Frobenius pour l'induite compacte. D'après le lemme précédent, $\mathrm{End}_G(X) \simeq \mathcal{H}(G,\rho)$ est de dimension 1. On en déduit que la composante isotypique X^ρ est isomorphe à ρ, ou autrement dit, que ρ intervient dans X avec multiplicité 1.

Soit Y un sous-espace G-invariant non nul de X. On a

$$0 \neq \mathrm{Hom}_G(Y,X) = \mathrm{Hom}_G(Y, \text{c-Ind}_K^G \rho) \subset \mathrm{Hom}_G(Y, \mathrm{Ind}_K^G \rho) \simeq \mathrm{Hom}_K(Y,\rho)$$

où l'isomorphisme provient de la Réciprocité de Frobenius pour l'induction non compacte. Donc, Y étant semisimple comme représentation de K, on a $Y^\rho \neq 0$, ce qui implique $Y^\rho = X^\rho$ et $Y \supset X^\rho$. Or X^ρ n'est rien d'autre que l'espace des fonctions dans X qui ont leur support dans K et l'on sait que ce sous-espace engendre X. On a donc $Y = X$ et Σ est bien irréductible.

Nous devons à présent montrer que Σ possède un coefficient non nul à support compact modulo le centre.

Soit X_K l'ensemble des fonctions de X à support dans K. On sait que :

– X_K est un sous-K-module de X isomorphe à ρ ;

– X coïncide avec la somme directe $\bigoplus_{g\in G/K} \pi(g)X_K$.

Le K-isomorphisme $W \longrightarrow X_K$ associe à tout vecteur $w \in W$ la fonction f_w donnée par $f_w(k) = \rho(k).w$.

Fixons un vecteur non nul $w \in W$ et une forme linéaire (lisse) $\check{w} \in \check{W}$ qui ne s'annule pas en w (en fait cette condition ne sera pas vraiment nécessaire). Soit $\check{f}_{\check{w}}$ la forme linéaire sur X qui vaut $\check{w}$ sur X_K et qui est nulle sur les $\pi(g).X_K$, $g \notin K$. On vérifie immédiatement qu'elle est lisse. Alors le coefficient $\gamma_{f_{\check{w}},f_w}$ a son support contenu dans K, comme on peut le vérifier aisément. CQFD. Ceci termine la preuve du Théorème.

Nous allons appliquer le théorème d'irréductibilité précédent pour donner un premier exemple de représentations cuspidales (ce qui prouvera qu'elles existent !).

Nous supposons ici que K est le compact maximal $\mathrm{GL}(2,\mathfrak{o})$. Posons :

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix} \text{ et } I_1 = \begin{pmatrix} 1+\mathfrak{p} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & 1+\mathfrak{p} \end{pmatrix} .$$

Le quotient K/K^1 s'identifie canoniquement à $G(\mathbf{k}) := \mathrm{GL}(1,\mathbf{k})$. Le sous-groupe I_1 de K est l'image réciproque du sous-groupe $N(\mathbf{k})$ formé des matrices unipotentes supérieures dans $G(\mathbf{k})$.

Rappelons qu'une représentation irréductible de $G(\mathbf{k})$ est *cuspidale* si elle ne possède aucun vecteur fixe non nul sous $N(\mathbf{k})$.

On dit qu'une représentation λ de K est *relevée* d'une représentation $\bar{\lambda}$ de $G(\mathbf{k})$ si elle est triviale sur K^1 est si elle induit la représentation $\bar{\lambda}$ sur le quotient.

Théorème. *Soit (π, V) une représentation lisse et irréductible de G, et supposons qu'elle a un vecteur fixe non nul sous K_1. Alors on est exactement dans une des deux situations suivantes :*

(1) *π contient une représentation λ de K, relevée d'une représentation $\bar{\lambda}$ de $G(\mathbf{k})$;*

(2) *π contient le caractère trivial de I_1.*

Dans le premier cas, π est cuspidale et il existe une représentation Λ de ZK telle que $\Lambda_{|K} = \lambda$ et

$$\pi \simeq c\text{-}Ind_{ZK}^{G}\,\Lambda\ .$$

Remarque. Le point (2) donne un procédé effectif de constructions de cuspidales irréductibles.

Preuve du Théorème. Puisque le groupe K_1 est normal dans K, K stabilise l'espace vectoriel (de dimension finie) V^{K_1}. On peut donc l'écrire comme une somme directe de représentations de K triviale sur K_1. Celles-ci correspondent à des représentations de $G(\mathbf{k})$. L'une d'elle est non cuspidale si et seulement si elle admet un vecteur fixe non nul sous $N(\mathbf{k})$, c'est-à-dire si la représentation correspondante de K admet un vecteur fixe non nul sous I_1. Nous devons prouver qu'elles sont toutes cuspidales ou toutes non cuspidales. Pour selon nous prouvons le

Lemme. *Pour $i = 1,2$, soit $\bar{\rho}_i$ une représentation irréductible de $G(\mathbf{k})$ et notons ρ_i sa relevée à K. Supposons ρ_i cuspidale.*

(1) *Les représentation ρ_i s'entrelacent dans G si et seulement si $\bar{\rho}_1 \simeq \bar{\rho}_2$.*

(2) *Un élément $g \in G$ entrelace ρ_1 si et seulement si $g \in ZK$.*

Preuve du Lemme. Le fait que $g \in G$ entrelace ρ_1 et ρ_2 est une propriété de la double classe $KgZK$. On peut donc supposer que

$$g = \begin{pmatrix} \varpi^a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \text{pour un } a \geqslant 0 \ .$$

Si $g = 1$, le résultat est évident. On a

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{K^g \cap K}(\rho_1^g, \rho_2) \subset \mathrm{Hom}_{K_1^g \cap K}(\rho_2^g, \rho_1) \ .$$

Or le groupe $K_1^g \cap K$ contient le sous-groupe

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{o} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} 1 & \mathfrak{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^g$$

sur lequel ρ_2^g est trivial (somme directe de copies du caractère trivial). Ceci entraîne que ρ_1 doit contenir le caractère trivial de N_0, donc de I_1 et contredit la cuspidalité de ρ_1 et prouve (1).

Le point (2) est une conséquence de (1).

Ainsi les représentations irréductibles de K intervenant dans K/K_1 sont soit toutes cuspidales soit toutes non cuspidales. Supposons que l'on soit dans le premier cas et soit λ une de ces représentations de sorte que λ apparaît dans π. Soit ω_π le caractère central de π. On a l'égalité $(\omega_\pi)_{|\mathfrak{o}^\times} = \omega_\lambda$ (le caractère central de λ). On peut donc former la représentation lisse Λ de ZK donnée par

$$\Lambda(zk) = \omega_\pi(z)\lambda(k) \ , \ z \in Z, \ k \in K$$

On a $ZK \subset I_G(\Lambda) \subset I_G(\Lambda_{|K}) = I_G(\lambda) \subset ZK$. Donc on a l'égalité $I_G(\Lambda) = ZK$. Ce qui prouve que $\text{c-Ind}_{ZK}^G \Lambda$ est irréductible et supercuspidale.

Puisque Λ apparaît dans π, par la Réciprocité de Frobenius pour l'induite compacte, on a :

$$0 \neq \mathrm{Hom}_{ZK}(\Lambda, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{ZK}^G \Lambda, \pi) \ .$$

Ainsi $\pi \simeq \text{c-Ind}_{ZK}^G \Lambda$. CQFD.

Annexe I – Lemme de Zorn

L'objet de cette annexe est de donner les notions nécessaires à l'énoncé du Lemme de Zorn. Le lecteur peut se référer au livre *Algebra* de Serge Lang, troisième édition révisée, Appendix 2, page 877.

Soit S un ensemble. Une *relation d'ordre partielle* sur S et une relation $x \geqslant y$ sur les couples d'éléments (x, y) de S, pas forcément définie partout, qui vérifie les propriétés suivantes :

ORD 1. On a $x \leqslant x$.
ORD 2 . Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.
ORD 3. Si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$.

Soit $(S, \leqslant)$ un ensemble partiellement ordonné. Chaque sous-ensemble T est muni d'un ordre partiel obtenu en restreignant celui de S. Un *majorant* de $T \subset S$ et un élément $m \in S$ tel que $t \leqslant m$ pour tout $t \in T$. Un élément m de T est dit *maximal*, si pour tout $t \in T$ tel que $t \geqslant m$, on a $m = t$. Un élément maximal de T n'est pas forcément un majorant de T.

Une partie T de S est dite *totalement ordonnée* si la relation $x \geqslant$ y est définie partout, c'est-à-dire si quels que soient $t_1, t_2 \in T$, on a $t_1 \geqslant t_2$ ou $t_2 \geqslant t_1$. Enfin, on dit que S est un *ensemble inductif* si toute partie T de S non vide et totalement ordonnée admet un plus grand élément.

Lemme de Zorn. *Soit $(S, \leqslant)$ un ensemble partiellement ordonné. Alors si S est inductif, il possède un élément maximal.*

Le *Lemme de Zorn* porte mal son nom, car dans l'axiomatique de la théorie des ensembles due à Zermelo-Fraenkel (qui fait consensus dans la communauté mathématique internationale), il a un statut d'axiome. Il est en effet équivalent à l'axiome du choix. Il permet de démontrer des propriétés d'objets très généraux sur lesquels on n'a mis aucune condition de "taille". On peut souvent le remplacer par un autre argument dans des cas particuliers.

Exercice 1. *Soit A un anneau unitaire. Montrer que A possède un idéal à gauche (resp. à droite) maximal. On raisonnera sur l'ensemble S des idéaux à gauche de A différent de A (i.e. qui ne contienent pas 1_A).*

Exercice 2. *Soit A une $\mathbb{C}$-algèbre qui ne possède pas forcément d'élément unité. Montrer qu'un A-module à gauche M de type fini possède un quotient irréductible. En raisonnant avec un système fini de générateurs, on montrera que la réunion d'une famille totalement ordonnée par l'inclusion de sous-modules propres est encore propre.*

Références bibliographiques

[AB] P. Abramenko et K.S. Brown, *Buildings*, Graduate Texts in Mathematics 248, Springer.

[Ch] G. Choquet, *Cours d'Analyse, Tome II, Topologie*, Masson et Cie Ed., 1964.

[BouTop] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématiques, Topologie Générale, Chap. 1 à 4*, Springer, 2007 (version originale 1971).

[Bu] Daniel Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 55, Cambridge Univesity Press 1998.

[BG] J. Bernstein et S. Gelbart ed., *An introduction to the Langlands program*, Birkhäuser 2004.

[BH] Colin J. Busnell et Guy Henniart, *The local Langlands conjecture for* $\mathrm{GL}(2)$. Grundlehren der math. Wissenschaften, volume 335, Springer 2006. [*Bibliothèque, rayon des Grundlehren*].

[La] Serge Lang, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics, revised third edition, Springer, 2002.

[Re] David Renard, *Représentations des groupes réductifs p-adiques*, Cours spécialisés 17, collection SMF, 2010.

[W] André Weil, *Basic Number Theory*, Grundlehren des mathematischen Wissenschaften, vol 144, Springer, 1967. [*Bibliothèque, rayon des Grundlehren*].