SUR UNE CONJECTURE DE TADIĆ

A.I. BADULESCU AND D.A. RENARD

1. English abstract

Let F be a non-archimedian field of characteristic zero and D a central division algebra over F of finite dimension d^2. For all psoitive integer r, set $G'_r = GL(r, D)$. In [Ta2], Section 6, M. Tadić gives a conjectural classification of the unitary dual of the G'_r, and five statements denoted U0,..., U4, which imply the classification. In *loc.cit.* M. Tadić proves U3 and U4. Also, following [Ta1] and [Ta2], U0 and U1 implie U2. These statements, and the rezulting classification are the natural generalization of the case $D = F$ completly solved by M. Tadić in [Ta1]. Here we prove U1. The proof uses some results from [Ba]. Thus, the classification of the unitary dual of the G'_r is now reduced to the conjecture U0, which states that a parabolically induced representation from an irreducible unitary representation is irreducible.

2. Introduction

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique nulle et D une algèbre à division centrale sur F. On suppose que D est de dimension finie d^2 sur F. Pour tout entier strictement positif r, on pose $G'_r = GL_r(D)$. Dans la section 6 de [Ta2], M. Tadić propose une classification conjecturale du spectre unitaire des G'_r, et donne cinq énoncés, U0, U1,... U4 qui impliquent la classification. Il démontre dans le même article U3, U4. Les prop. 2.2, et lemme 2,5 de [Ta2], ensemble avec un argument standard ([Ta1], prop 2.9) montrent que U0 et U1 impliquent U2. Ces énoncés et la classification qui en découle sont la généralisation naturelle du cas $F = D$, complètement traité par M. Tadić dans [Ta1]. Nous montrons ici U1, qui stipule que certaines représentations, notées $u(\delta, k)$, sont unitaires. En utilisant des correspondances de type Jacquet-Langlands il est montré dans [Ba] que certaines représentations remarquables sont unitaires, et que ce résultat était prévu par les conjectures de Tadić. Dans ce papier nous montrerons que le résultat de [Ba] implique la conjecture U1 de Tadić. Ainsi, le seul problème qui reste à résoudre pour obtenir une classification du dual unitaire des G'_r analogue à la classification dont on dispose pour les groupes linéaires $G_r(F)$ est la conjecture U0, qui affirme que l'induite parabolique d'une représentation irréductible et unitaire est irréductible.

Les auteurs remercient Marko Tadić d'avoir simplifié leur preuve et pour la remarque 4.3.

Date: May 23, 2003.

3. Énoncés

Soient F un corps local non archimédien et D une algèbre à division centrale sur F. On suppose que D est de dimension finie d^2 sur F. Pour tous entiers strictement positifs n et r, on pose $G_n = GL_n(F)$ et $G'_r = GL_r(D)$. On note ν la norme réduite sur G'_r. Si $n = rd$ et si π est une représentation cuspidale de G'_r, π correspond par la correspondance de Jacquet-Langlands ([DKV]) à une représentation essentiellement de carré intégrable π_0 de G_n. Le support cuspidal de π_0 est du type $\rho \otimes \nu\rho \otimes ... \otimes \nu^{m-1}\rho$ où m est un entier qui divise n et ρ est une représentation cuspidale de $G_{\frac{n}{m}}$. On pose alors $a(\pi) = m$ et $\nu_\pi = \nu^{a(\pi)} = \nu^m$ et l'on note $[\rho, \nu\rho, \dots, \nu^{m-1}\rho]$ le segment de Zelevinskii ([Ze]) associé. Plus généralement, si δ est une représentation essentiellement de carré intégrable de G'_r, son support cuspidal est du type $\rho \otimes \nu^x\rho \otimes ... \otimes \nu^{x(m-1)}\rho$, où m est un entier qui divise r et ρ est une représentation cuspidale de $G'_{\frac{r}{m}}$. Dans ce cas, on a $x = a(\rho)$. On pose $a(\delta) = x$ et $\nu_\delta = \nu^x$. On appelle $[\rho, \nu^x\rho, \dots, \nu^{x(m-1)}\rho]$ *segment de Tadić* (de δ). Deux segments de Tadić $[\rho, \nu^{a(\rho)}\rho, \dots, \nu^{a(\rho)(m-1)}\rho]$ et $[\rho', \nu^{a(\rho')}\rho, \dots, \nu^{a(\rho')(m'-1)}\rho']$ sont dits *liés* si ou bien il existe un entier k, $1 \leq k \leq m$ tel que $k + m' > m$ et $\rho' = \nu^{k\,a(\rho)}\rho$, ou bien il existe un entier k, $1 \leq k \leq m'$ tel que $k + m > m'$ et $\rho = \nu^{k\,a(\rho')}\rho'$. Dans les deux cas, on a $a(\rho') = a(\rho)$. Ces définitions généralisent celles de Zelevinskii. Deux représentations essentiellement de carré intégrable de G' sont dites *liées* si leur segment de Tadić sont liés.

On adopte les conventions suivantes concernant l'induction parabolique. Soit $n_1, \dots, n_k$ une suite de nombre entiers strictement positifs dont la somme est r. La notation $\prod_{i=1}^k G'_{n_i}$ désignera le sous-groupe de Levi G'_r formé des matrices diagonales par blocs de taille respective $n_1, n_2, \dots, n_k$ en descendant sur la diagonale. Si, pour tout $i \in \{1, 2...k\}$, on se donne une représentation admissible π_i de G'_{n_i}, la notation $\mathrm{ind}_{\prod_{i=1}^k G'_{n_i}}^{G'_r} \left(\otimes_{i=1}^k \pi_i\right)$ désignera la représentation induite à partir du sous-groupe parabolique de G'_r de facteur de Levi $\prod_{i=1}^k G'_{n_i}$ contenant le groupe des matrices triangulaires supérieures.

Pour tout $i \in \{1, 2...k\}$, soit δ_i une représentation de carré intégrable de G'_{n_i}. Soit $a_1, a_2, ..., a_k$ une suite décroissante de nombres entiers. D'après la classification de Langlands, la représentation $\mathrm{ind}_{\prod_{i=1}^k G'_{n_i}}^{G'_r} \left(\otimes_{i=1}^k \nu^{a_i}\delta_i\right)$ a un unique quotient irréductible $L(\otimes_{i=1}^k \nu^{a_i}\delta_i)$. Comme l'induite d'une représentation de carré intégrable est irréductible ([DKV]) il est montré dans [Ta2] que toute représentation lisse irréductible π de G'_r est de la forme $\pi = L(\otimes_{i=1}^k \nu^{a_i}\delta_i)$ avec k, n_i et a_i comme ci-dessus. Les représentations essentiellement de carré intégrable $\nu^{a_i}\delta_i$ avec leur multiplicités respectives sont uniquement déterminées par π à permutation près. On les appelle ici les *composantes* de π. Le résultat suivant (prop. 2.2, [Ta2]) généralise un résultat de Zelevinskii :

Proposition 3.1. *Soit $m_1, m_2, ..., m_l$ une suite de nombres entiers strictement positifs telle que $\sum_{i=1}^l m_i = r$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ on se donne une représentation π_i de G'_{m_i}. Si, pour tout $i_1 \neq i_2$, aucune composante de*

π_{i_1} n'est liée à une composante de π_{i_2}, alors la représentation induite à G'_r de la représentation $\otimes_{i=1}^{l}\pi_i$ est irréductible. L'ensemble de ses composantes, comptées avec multiplicités, est la réunion des ensembles des composantes des π_i, comptées avec multiplicités.

Donnons les énoncés des conjectures U0, U1 et U2 de Tadić ([Ta2], sect. 6).

Conjecture U0. *Soit P un sous-groupe parabolique de G' et M le facteur de Levi de P. Si π est une représentation lisse irréductible unitaire de M, alors $\mathrm{ind}_P^{G'} = \pi$ est irréductible.*

Dans le cas $D = F$, cette conjecture a été montrée dans [Be].

Soient k et q deux entiers et δ une représentation de carré intégrable de G'_q. Posons $r = kq$. La représentation $\mathrm{ind}_{(G'_q)^k}^{G'_r}(\nu_\delta^{\frac{k-1}{2}}\delta\otimes\nu_\delta^{\frac{k-3}{2}}\delta\otimes\ldots\otimes\nu_\delta^{-\frac{k-1}{2}}\delta)$ a un unique quotient irréductible, $L(\nu_\delta^{\frac{k-1}{2}}\delta\otimes\nu_\delta^{\frac{k-3}{2}}\delta\otimes\ldots\otimes\nu_\delta^{-\frac{k-1}{2}}\delta)$, que nous noterons $u(\delta, k)$.

Conjecture U1. *$u(\delta, k)$ est unitaire.*

Soit α un nombre réel dans l'intervalle $]0, 1/2[$. On pose

$$\pi(u(\delta,k),\alpha) = \mathrm{ind}_{G'_r\times G'_r}^{G'_{2r}}\left(\nu_\delta^{\alpha}u(\delta,k)\otimes\nu_\delta^{-\alpha}u(\delta,k)\right).$$

Conjecture U2. *La représentation $\pi(u(\delta, k), \alpha)$ est unitaire.*

Remarquons que $\pi(u(\delta, k), \alpha)$ est toujours irréductible, grâce à la prop. 3.1. Dans [Ta2], sect. 6, Tadić montre deux autres résultats, U3 et U4 que nous ne rappelons pas ici. Les énoncés U0 à U4 impliquent une classification du spectre unitaire de G'_r analogue à la classification pour $GL_n(F)$. Tadić montre également que U0 implique U2. Nous montrons ici la conjecture U1, réduisant ainsi la classification de Tadić à la preuve de U0.

4. Preuve de la conjecture U1

Rappelons un résultat de [Ba]. Avec les notations précédentes la représentation $\mathrm{ind}_{(G'_q)^k}^{G'_r}(\nu^{\frac{k-1}{2}}\delta\otimes\nu^{\frac{k-3}{2}}\delta\otimes\ldots\otimes\nu^{-\frac{k-1}{2}}\delta)$ admet un unique quotient irréductible, $L(\nu^{\frac{k-1}{2}}\delta\otimes\nu^{\frac{k-3}{2}}\delta\otimes\ldots\otimes\nu^{-\frac{k-1}{2}}\delta)$, que nous noterons $\bar{u}(\delta, k)$ (remarquons que si $D = F$, on a $u(\delta, k) = \bar{u}(\delta, k)$; de même si $a(\delta) = 1$). On a ([Ba], corollaire 4.10) :

Proposition 4.1. *$\bar{u}(\delta, k)$ est unitaire.*

Montrons comment la prop. 4.1 implique la conjecture U1. Rappelons que δ est une représentation de G'_q, où $r = kq$. Si $k = 1$, $u(\delta, k) = \delta$ est unitaire. Soit $k \geq 2$.

Lemme 4.2. *L'induite de $G'_r\times(G'_{(k-1)q})^{a(\delta)-1}$ à $G'_{((a(\delta)-1)(k-1)+k)q}$ de*

$$u(\delta,k)\otimes\nu^{\frac{a(\delta)-2}{2}}u(\delta,k-1)\otimes\nu^{\frac{a(\delta)-4}{2}}u(\delta,k-1)\otimes\ldots\otimes\nu^{\frac{-a(\delta)+2}{2}}u(\delta,k-1)$$

est irréductible, égale à $\bar{u}(\delta,(a(\delta)-1)(k-1)+k)$.

Démonstration. Nous allons montrer que les composantes des représentations différentes intervenant dans le produit tensoriel ne sont pas liées et appliquer la prop. 3.1 pour obtenir l'irréductibilité. Les composantes de $u(\delta, k)$ sont $\{\nu^{a(\delta)(\frac{k-1}{2}-p)}\delta\}_{0\leq p\leq k-1}$. Les composantes de la représentation $\nu^{\frac{a(\delta)-2}{2}-q}u(\delta, k-1)$, où $0 \leq q \leq a(\delta)-2$ sont $\{\nu^{\frac{a(\delta)-2}{2}-q+a(\delta)(\frac{k-2}{2}-t)}\delta\}_{0\leq t\leq k-2}$. Il est clair qu'il n'existe pas de triplets (p, q, t), avec $0 \leq p \leq k-1$ et $0 \leq q \leq a(\delta)-2$ et $0 \leq t \leq k-2$ tels que la différence de $a(\delta)(\frac{k-1}{2}-p)$ et de $\frac{a(\delta)-2}{2} - q + a(\delta)(\frac{k-2}{2}-t)$ soit un multiple de $a(\delta)$, puisque $a(\delta)$ ne peut diviser $q+1$. De même, il n'existe pas de quadruplets (q, q', t, t'), avec $0 \leq q < q' \leq a(\delta)-2$ et $0 \leq t, t' \leq k-2$ tels que la différence de $\frac{a(\delta)-2}{2} - q + a(\delta)(\frac{k-2}{2}-t)$ et de $\frac{a(\delta)-2}{2} - q' + a(\delta)(\frac{k-2}{2}-t')$ soit un multiple de $a(\delta)$.

Maintenant, puisque la représentation induite est irréductible et que les composantes (voir définition dans la section précédente) de $\bar{u}(\delta, (a(\delta)-1)(k-1)+k)$ et de la représentation induisante sont les mêmes, par la prop. 2.3 de [Ta2], l'induite n'est autre que $\bar{u}(\delta, (a(\delta)-1)(k-1)+k)$. □

Si $a(\delta)$ est pair, posons

$$T_0 = \bigotimes_{s=1}^{\frac{a(\delta)}{2}-1} \pi(u(\delta, k-1), \frac{a(\delta)}{2} - s))$$

et, si $a(\delta)$ est impair, posons

$$T_1 = \bigotimes_{s=1}^{\frac{a(\delta)-1}{2}} \pi(u(\delta, k-1), \frac{a(\delta)}{2} - s)).$$

T_0 est une représentation de $(G'_{2(k-1)q})^{\frac{a(\delta)}{2}-1}$ et T_1 est une représentation de $(G'_{2(k-1)q})^{\frac{a(\delta)-1}{2}}$. A partir du lemme 4.2 nous pouvons maintenant écrire, si $a(\delta)$ est pair,

$$\bar{u}(\delta, (a(\delta)-1)(k-1)+k) = ind\,(u(\delta, k) \otimes u(\delta, k-1) \otimes T_0)$$

et, si $a(\delta)$ est impair,

$$\bar{u}(\delta, (a(\delta)-1)(k-1)+k) = ind\,(u(\delta, k) \otimes T_1).$$

La représentation $u(\delta, k-1)$ est hermitienne et donc les $\pi(u(\delta, k-1), \frac{a(\delta)}{2} - s)$ qui sont des facteurs dans T_0 ou T_1 sont hermitiennes; $u(\delta, k)$ l'est aussi, et comme nous sommes devant un produit tensoriel de représentations hermitiennes telles que la représentation induite est irréductible et unitaire (prop. 4.1), nous en déduisons qu'elles sont toutes unitaires par [Ta3], p. 234 d) par exemple. En particulier, $u(\delta, k)$ est unitaire. □

La remarque suivante est due à Marko Tadić:

Remarque 4.3. *Si $a(\delta) \geq 3$, on obtient par la preuve ci-dessus que, si $a(\delta)$ est pair, alors $\pi(u(\delta, k-1), \frac{a(\delta)}{2} - 1)$ est unitaire, et, si $a(\delta)$ est impair, alors $\pi(u(\delta, k-1), \frac{a(\delta)-1}{2})$ est unitaire. Comme ces demi-entiers sont compris chaque fois strictement entre 0 et $\frac{a(\delta)}{2}$, cela donne une preuve directe de* U2 *dans ce cas, indépendante de* U0 *et* U1. *L'argument est expliqué dans [Ta1], prop. 2.9.*

Bibliographie

[Ba] A.I. Badulescu *"Correspondance de Jacquet-Langlands étendue à toutes les représentations"*, prépublication, 2002, consultable à l'adresse http://arxiv.org.

[Be] J.N. Bernstein *"P-invariant distributions on $GL(N)$ and the classification of unitary representations of $GL(N)$ (non-archimedian case)"*, in Lie Groups and Representations II, Lecture Notes in Mathematics 1041, Springer-Verlag, 1983.

[DKV] P. Deligne, D. Kazhdan, M.-F. Vignéras, *"Représentations des algèbres centrales simples p-adiques"*, in Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Hermann, Paris 1984.

[Ta1] M. Tadić, *"Classification of unitary representations in irreducible representations of general representations of general linear groups (non-archimedian case)"*, Ann. Sci. ENS **19**, no. 3, (1986), p. 335-382.

[Ta2] M. Tadić, *"Induced representations of $GL(n;A)$ for a p-adic division algebra A"*, J. Reine angew. Math. **405** (1990), p. 48-77.

[Ta3] M. Tadić , *"An external approach to unitay representation"*, Bulletin (New Series) of the AMS, vol. 28, no. 2 (1993), p. 215-152.

[Ze] A. Zelevinskii, *"Induced representations of reductive p-adic groups II"*, Ann. Sci. ENS **13** (1980), p. 165-210.

Alexandru Ioan BADULESCU, David Alexandre RENARD, Université de Poitiers, UFR Sciences SP2MI, Département de Mathématiques, Téléport 2, Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL CEDEX

E-mail : badulesc@mathlabo.univ-poitiers.fr

E-mail : renard@mathlabo.univ-poitiers.fr