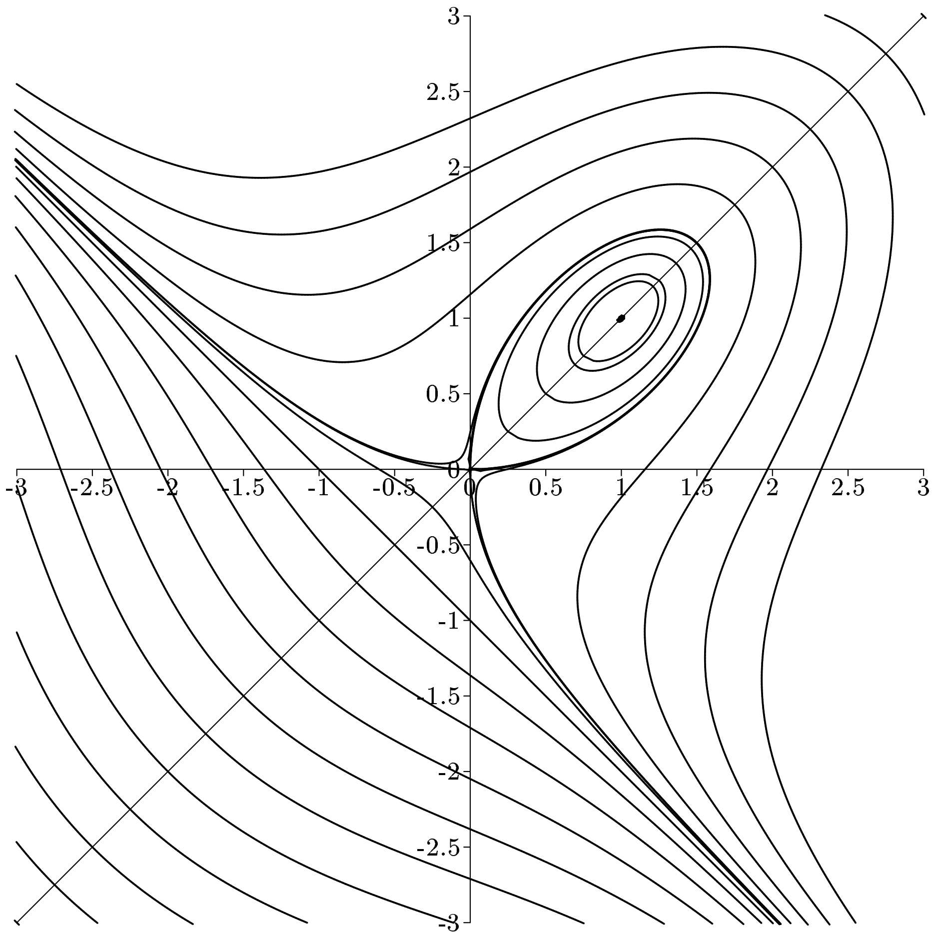
Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Maîtrise de Mathématiques
Année 2002–2003

Géométrie différentielle. — De l'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$

D'un point de vue numérique, il est en général irréaliste d'essayer de résoudre une équation telle que $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ point par point. Ce qui est nettement plus raisonnable est de se donner une solution simple de cette équation et de tracer l'équipotentielle de la fonction correspondante (ici $f : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$) passant par ce point, c'est-à-dire, une courbe qui en tout point est orthogonale au gradient de cette fonction (dont l'espace tangent est le noyau de la différentielle). Nous n'épiloguerons pas sur les méthodes à mettre en œuvre : elles sont comparables à celles portant sur les équations différentielles.



En général, on a souvent une divergence visible des solutions numériques par rapport aux vraies solutions qui provient notamment de phénomènes de courbure. Une contrepartie intéressante est qu'on évite ainsi souvent les points dégénérés, et, dès lors, que le tracé se poursuit sans encombre.

Tracer plusieurs équipotentielles permet de localiser l'allure générale de celle qui, du fait des erreurs numériques, aura pu nous échapper. Ici, il s'agit de celle qui passe par le point $(3/2, 3/2)$ et qui repasse par le point singulier $(0, 0)$. Il est manifeste que le point $(0, 0)$ est un point multiple. Par ailleurs, ces tracés auront mis en évidence le caractère singulier du point $(1, 1)$, qui n'est — sans être un zéro de la fonction considérée —, de toute évidence, pas un point multiple.