Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2004–05

EXAMEN DE PROBABILITÉS, SECONDE SESSION
Mercredi 22 juin 2005, 9h00–12h00

Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice est autorisé à l'exclusion de tout autre matériel informatique. Les différents exercices sont indépendants. Pour tous les calculs — en particulier dans l'exercice 1 —, on distinguera avec précision les égalités (signe « = ») des approximations (signe « ≈ ») ; les résultats numériques doivent être donnés avec la précision accordée par l'emploi de la table ; leurs unités, s'il y a lieu, devront être précisées. La rigueur et la clarté des réponses seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1. — La masse d'une souris adulte est une variable aléatoire X distribuée selon une loi normale. La masse moyenne μ est 20 g et son écart-type σ est égal au dixième de la masse moyenne.

(i) Déterminer la probabilité que X soit supérieur (strictement) à 23 g, puis la probabilité que X soit inférieur (strictement) à 17 g. En déduire les probabilités des événements $\{X \in [17\,\mathrm{g}, 23\,\mathrm{g}]\}$ et $\{|X - 20\,\mathrm{g}| > 3\,\mathrm{g}\}$.

(ii) *Sachant* qu'un certain laboratoire de biologie ne travaille qu'avec des souris de masse comprise entre 17 g et 23 g, déterminer les probabilités de trouver dans ce laboratoire des souris de masse inférieure à 20 g, puis, de masse inférieure à 18 g.

(iii) Déterminer les quantiles $q_{1/4}$, $q_{1/2}$ et $q_{3/4}$ respectivement d'ordre 1/4, 1/2 et 3/4 de la distribution de X.

Exercice 2. — Les notes que peuvent obtenir un étudiant pour le partiel et l'examen de première session du module 6L18 sont modélisées respectivement par deux variables aléatoires X et Y, de loi uniforme sur l'intervalle (continu !) $[0, 20]$, indépendantes.[1] La note de première session est la variable aléatoire Z à valeurs dans $[0, 20]$ définie par

$$Z = \max\left(Y,\ \frac{1}{3}\,X + \frac{2}{3}\,Y\right).$$

Les résultats numériques des différents calculs seront donnés sous forme fractionnaire réduite.

(i) Donner les probabilités des événements $\{X < 8\}$, $\{X \geqslant 10\}$, $\{X \in [7, 9]\}$, $\{X \in [15, 25]\}$.

(ii) Préciser quelle est la loi du couple (X, Y) en s'appuyant sur les hypothèses et les résultats énoncés en cours.

(iii) Déterminer la fonction de répartition F_Z de la variable Z. Pour cela, on précisera clairement quelles sont les valeurs que prend F_Z lorsque son argument z n'est pas dans l'intervalle $[0, 20]$; puis, lorsque l'argument z est dans $[0, 20]$, on explicitera le domaine auquel doit appartenir le couple aléatoire (X, Y) pour que l'événement $\{Z \leqslant z\}$ soit réalisé ; il est demandé de réaliser des schémas convenablement annotés illustrant cette situation (on pourra notamment distinguer les cas $0 \leqslant z < 20/3$, $z = 20/3$ et $20/3 < z \leqslant 20$), schémas qui ne sauraient cependant se substituer à des explications clairement rédigées.

(iv) Déduire de la question précédente la probabilité qu'un étudiant obtienne le module (note de première session supérieure ou égale à 10).

---

1. L'hypothèse d'indépendance pourrait paraître irréaliste mais l'expérience ne la dément pas vraiment. En revanche, l'hypothèse d'uniformité est fantaisiste.

(v) *Sachant* qu'un étudiant a eu une note inférieure (au sens strict par exemple) à 10 au partiel, déterminer la probabilité qu'il obtienne le module à l'issu de la première session. (*Remarque.* — Cette question peut être traitée indépendamment des précédentes.)

(vi) *Sachant* qu'un étudiant a eu une note supérieure (au sens large par exemple) à 10 au partiel, déterminer la probabilité qu'il obtienne le module à l'issu de la première session.

(vii) Retrouver la probabilité qu'un étudiant obtiennent le module à partir des résultats des deux questions précédentes et des valeurs de $\mathbb{P}\{X < 10\}$ et $\mathbb{P}\{X \geqslant 10\}$.

Exercice 3. — Peut-on piper deux dés à six faces de sorte que la somme des points obtenus lors d'un jet de ces dés soit uniformément répartie sur l'ensemble $\{2, 3, \ldots, 12\}$ *?*

Afin de répondre à cette question, on supposera données deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{1, \ldots, 6\}$ indépendantes, non nécessairement de même loi, telle que la variable aléatoire $X + Y$ soit uniformément répartie sur $\{2, \ldots, 12\}$, et considérera leurs fonctions génératrices G_X, G_Y et G_{X+Y} qui sont définies par

$$G_X(x) = \mathbb{E}\big[x^X\big], \qquad G_Y(x) = \mathbb{E}\big[x^Y\big], \qquad G_{X+Y}(x) = \mathbb{E}\big[x^{X+Y}\big], \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Mots-clefs. — Polynômes réels, identité géométrique, racines de l'unité.

Annexe. — La table suivante donne des valeurs de la fonction de répartition Φ de la loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. Elle permet d'évaluer $\Phi(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ avec une précision *minimale* de 0,01, et aussi d'évaluer $\Phi^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \in]0,1[$, avec une précision du même ordre pour $\alpha \in]0{,}0014\,;\, 0{,}9986[$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2004–05

CORRECTION DE L'EXAMEN DE PROBABILITÉS, SECONDE SESSION

Mercredi 22 juin 2005, 9h00–12h00

Exercice 1. — Nous notons $\mu = 20\,\mathrm{g}$, $\sigma = 2\,\mathrm{g}$ et X une variable aléatoire réelle de loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ. Rappelons qu'alors la variable aléatoire $(X-\mu)/\sigma$ a pour loi la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

(i) Nous avons :

- $\mathbb{P}\{X > 23\,\mathrm{g}\} = 1-\mathbb{P}\{\mathrm{X} \leqslant 23\} = 1-\mathbb{P}\{(\mathrm{X}-\mu)/\sigma \leqslant 1{,}5\} = 1-\Phi(1{,}5) \approx 1-0{,}9332 = 0{,}0668.$
- $\mathbb{P}\{X < 17\,\mathrm{g}\} = \mathbb{P}\{\mathrm{X} \leqslant 17\} = \mathbb{P}\{(\mathrm{X}-\mu)/\sigma \leqslant -1{,}5\} = \Phi(-1{,}5) = 1-\Phi(1{,}5) \approx 0{,}0668.$
- $\mathbb{P}\{X \in [17\,\mathrm{g}, 23\,\mathrm{g}]\} = 1-\mathbb{P}\{\mathrm{X} > 23\} - \mathbb{P}\{\mathrm{X} < 17\} \approx 1-0{,}0668-0{,}0668 = 0{,}8664.$
- $\mathbb{P}\{|X-20| > 3\,\mathrm{g}\} = 1-\mathbb{P}\{|X-20| \leqslant 3\,\mathrm{g}\} = 1-\mathbb{P}\{X \in [17\,\mathrm{g}, 23\,\mathrm{g}]\} \approx 1-0{,}8664 = 0{,}1336.$

(ii) On a clairement $\mathbb{P}\{X \leqslant 20 \,|\, X \in [17,23]\} = 1/2 = 0{,}5$ par symétrie de la loi de X autour de la valeur $\mu = 20\,\mathrm{g}$. Vérifions le :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \leqslant 20 \,|\, X \in [17,23]\} &= \frac{\mathbb{P}(\{X \leqslant 20\} \cap \{X \in [17,23]\})}{\mathbb{P}\{X \in [17,23]\}} = \frac{\mathbb{P}(\{X \in [17,20]\})}{\mathbb{P}\{X \in [17,23]\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{(X-\mu)/\sigma \in [-1.5,0]\})}{\mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \in [-1.5,1.5]\}} \\ &= \frac{\Phi(0)-\Phi(-1.5)}{\Phi(1.5)-\Phi(-1.5)} = \frac{0{,}5-1+\Phi(1.5)}{2\Phi(1.5)-1} = \frac{\Phi(1.5)-0{,}5}{2\Phi(1.5)-1} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X \leqslant 18 \,|\, X \in [17,23]\} &= \frac{\mathbb{P}(\{X \leqslant 18\} \cap \{X \in [17,23]\})}{\mathbb{P}\{X \in [17,23]\}} = \frac{\mathbb{P}(\{X \in [17,18]\})}{\mathbb{P}\{X \in [17,23]\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{(X-\mu)/\sigma \in [-1.5,-1]\})}{\mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \in [-1.5,1.5]\}} \\ &= \frac{\Phi(-1)-\Phi(-1.5)}{\Phi(1.5)-\Phi(-1.5)} = \frac{\Phi(1.5)-\Phi(1)}{2\Phi(1.5)-1} \\ &\approx \frac{0{,}9332-0{,}8413}{2\times 0{,}9332-1} \approx 0{,}106071 \approx 0{,}106.\end{aligned}$$

(iii) Le quantile q_α d'ordre $\alpha \in \,]0,1[$ de la distribution de X est donné par

$$q_\alpha = \sigma \times \Phi^{-1}(\alpha) + \mu = 2\Phi^{-1}(\alpha) + 20 \qquad \text{exprimé en grammes.}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}q_{1/4} &= 2\Phi^{-1}(1/4) + 20 = -2\Phi^{-1}(3/4) + 20 \approx -2\times 0{,}675 + 20 \approx 18.65\,\mathrm{g}, \\ q_{1/2} &= 2\Phi^{-1}(1/2) + 20 = 2\times 0 + 20 = 20\,\mathrm{g}, \\ q_{3/4} &= 2\Phi^{-1}(3/4) + 20 \approx 2\times 0{,}675 + 20 \approx 21.35\,\mathrm{g}.\end{aligned}$$

Exercice 2. — (i) La variable X est uniformément distribuée sur l'intervalle continu $[0,20]$, ainsi on a en particulier, si $[a,b] \subset [0,20]$, $\mathbb{P}\{X \in [a,b]\} = (b-a)/20$ (la fermeture des bornes

ne changeant rien).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{X < 8\} &= \mathbb{P}\{X \in [0,8[\} = (8-0)/20 = 2/5,\\ \mathbb{P}\{X \geqslant 10\} &= \mathbb{P}\{X \in [10,20]\} = (20-10)/20 = 1/2,\\ \mathbb{P}\{X \in [7,9]\} &= (9-7)/20 = 1/10,\\ \mathbb{P}\{X \in [15,25]\} &= \mathbb{P}\{X \in [15,20]\} = (20-15)/20 = 1/4.\end{aligned}$$

(ii) Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, la loi du couple (X,Y) est le produit des lois de X et de Y, c'est-à-dire la loi uniforme sur le carré $[0,20]^2$.

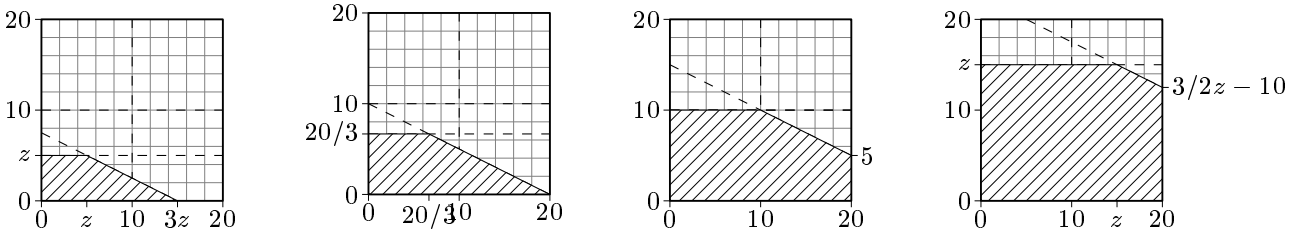
(iii) Soit $F_Z : \mathbb{R} \to [0,1]$ la fonction définie par

$$F_Z(z) = \mathbb{P}\{Z \leqslant z\}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

Puisque Z est une variable aléatoire à valeurs dans $[0,20]$ (Y est à valeurs dans $[0,20]$, $X/3 + 2Y/3$ aussi, donc leur maximum l'est aussi), on a $F_Z(z) = 0$ pour tout $z < 0$ et $F_Z(z) = 1$ pour tout $z \geqslant 20$. Soit $z \in [0,20]$. Nous avons

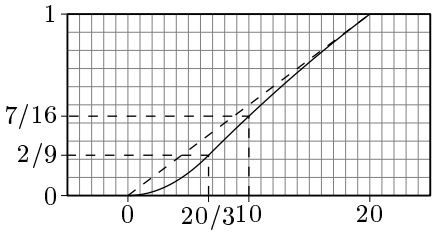
$$\begin{aligned}\{Z \leqslant z\} &= \{\max(Y,\ 1/3\,X + 2/3\,Y\big) \leqslant z\}\\ &= \big\{(X,Y) \in \{(x,y) \in [0,20]^2 : \max(y, 1/3x + 2/3y) \leqslant z\}\big\}\\ &= \big\{(X,Y) \in \{(x,y) \in [0,20]^2 : y \leqslant z \text{ et } 1/3x + 2/3y \leqslant z\}\big\}\\ &= \big\{(X,Y) \in \{(x,y) \in [0,20]^2 : y \leqslant z \text{ et } y \leqslant 3/2z - 1/2x\}\big\}\end{aligned}$$

événement dont la probabilité est l'aire normalisée dans $[0,20]^2$ du domaine $\{(x,y) \in [0,20]^2 : y \leqslant z \text{ et } y \leqslant 3/2z - 1/2x\}$. C'est le domaine en bas à gauche délimité par les droites $y = z$ et $y = 3/2z - 1/2x$. Lorsque $z \leqslant 20/3$, son aire est $(z/20)^2 + 1/2(2z/20)^2 = 2(z/20)^2$, lorsque $z \geqslant 20/3$, c'est $z/20 \times 20/20 - 1/4(1 - z/20)^2 = z/20 - (1 - z/20)^2/4$ (le triangle qu'on enlève au rectangle $[0,20] \times [0,z]$ est de longueur $20 - z$ et de hauteur $10 - z/2 = 1/2(20 - z)$).



On a ainsi

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant 0\\ 2(z/20)^2 & \text{si } z \in [0,20/3]\\ z/20 - (1 - z/20)^2/4 & \text{si } z \in [20/3,20]\\ 1 & \text{si } z \geqslant 20.\end{cases}$$



(iv) La probabilité qu'un étudiant obtienne le module en première session est $\mathbb{P}\{Z \geqslant 10\} = 1 - \mathbb{P}\{Z < 10\} = 1 - F_Z(10-) = 1 - F_Z(10) = 1 - 7/16 = 9/16$. (C'est strictement supérieur à $1/2\ldots$)

(v) Nous cherchons $\mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \,|\, X < 10\} = \mathbb{P}\{Y \geqslant 10 \,|\, X < 10\} = \mathbb{P}\{Y \geqslant 10\} = 1/2$. En effet $\{Z \geqslant 10 \text{ et } X < 10\} = \{Y \geqslant 10 \text{ et } X < 10\}$ qui est l'intersection de deux événements indépendants, on a donc $\mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \,|\, X < 10\} = \mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \text{ et } X < 10\}/\,\mathbb{P}\{X < 10\} = \mathbb{P}\{Y \geqslant 10 \text{ et } X < 10\}/\,\mathbb{P}\{X < 10\} = \mathbb{P}\{Y \geqslant 10\} \times \mathbb{P}\{X < 10\}/\,\mathbb{P}\{X < 10\} = \mathbb{P}\{Y \geqslant 10\} = 1/2$.

Une autre façon de le voir est de calculer $\mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \text{ et } X < 10\} = \mathbb{P}\{Y \geqslant 10 \text{ et } X < 10\}$ qui est l'aire normalisée du domaine $\{(x,y) \in [0,10[\times [10,20]\}$ et qui vaut $1/4$. Comme

$\mathbb{P}\{X < 10\} = 1/2$, on a $\mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \,|\, X < 10\} = \mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \text{ et } X < 10\}/\mathbb{P}\{X < 10\} = (1/4)/(1/2) = 1/2$.

(vi) Nous cherchons $\mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \,|\, X \geqslant 10\} = \mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \text{ et } X \geqslant 10\}/\mathbb{P}\{X \geqslant 10\}$. Or, $\mathbb{P}\{X \geqslant 10\} = 1/2$ et $\mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \,|\, X \geqslant 10\} = \mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \text{ et } X \geqslant 10\}$ est l'aire normalisée du domaine $\{(x, y) \in [10, 20] \times [0, 20] : y \geqslant 3/2z - x/2\}$ qui est égale à $5/16$ (voir dessins). On a donc $\mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \,|\, X \geqslant 10\} = (5/16)/(1/2) = 5/8$.

(vii) D'après la formule des probabilités totales appliquée avec pour système complet d'événements $\{X < 10\}$ et $\{X \geqslant 10\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Z \geqslant 10\} &= \mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \,|\, X < 10\}\,\mathbb{P}\{X < 10\} + \mathbb{P}\{Z \geqslant 10 \,|\, X \geqslant 10\}\,\mathbb{P}\{X \geqslant 10\} \\ &= 1/2 \times 1/2 + 5/8 \times 1/2 = 4/16 + 5/16 = 9/16,\end{aligned}$$

et nous retrouvons ainsi le résultat de la questiion (iv).

Exercice 3. — Les différentes fonctions génératrices sont des polynômes puisque les lois des variables aléatoires correspondantes sont portées par des parties finies de $\mathbb{N}$. Plus précisément, on a

$$G_X(x) = \mathbb{E}\big[x^X\big] = \sum_{k=1}^{6} x^k\,\mathbb{P}\{X = k\} = xP(x)$$

où P est un polynôme réel de degré 5. De même on a $G_Y(x) = xQ(x)$ avec Q polynôme de degré 5. Puisque X et Y sont indépendantes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les variables aléatoires réelles bornées x^X et x^Y sont indépendantes et on a alors

$$G_{X+Y}(x) = \mathbb{E}\big[x^{X+Y}\big] = \mathbb{E}\big[x^X \times x^Y\big] = \mathbb{E}\big[x^X\big] \times \mathbb{E}\big[x^Y\big] = G_X(x) \times G_Y(x) = x^2 P(x)Q(x)$$

Mais par hypothèse, $X + Y$ est uniformément répartie sur $\{2, \ldots, 12\}$, et on a donc

$$G_{X+Y}(x) = \sum_{k=2}^{12} x^k\,\mathbb{P}\{X + Y = 12\} = \sum_{k=2}^{12} x^k \times \frac{1}{11} = \frac{1}{11} \times x^2 \times \big(1 + x + \cdots + x^{10}\big).$$

On obtient ainsi l'identité

$$P(x)Q(x) = \frac{1}{11}\big(1 + x + \cdots + x^{10}\big). \qquad (*)$$

Puisque P et Q sont deux polynômes réels de degré impair, ils admettent chacun au moins une racine réelle ; leur produit PQ admet donc au moins deux racines réelles (éventuellement confondues). Or ce n'est pas le cas du polynôme $1 + x + \cdots + x^{10}$: 1 n'est pas racine de ce polynôme et, pour tout $x \neq 1$, on a par l'identité géométrique

$$1 + x + \cdots + x^{10} = \frac{1 - x^{11}}{1 - x}\,;$$

ceci montre que les racines de $1 + x + \cdots + x^{10}$ sont les racines $11^{\text{èmes}}$ de l'unité à l'exception de 1 ($\{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k/11} : k = 1, \ldots, 10\}$) et aucune d'elles n'est réelle. L'identité $(*)$ ne peut donc avoir lieu.

On ne peut pas piper deux dés à six faces de sorte que la somme des points obtenus lors d'un jet de ces dés soit uniformément répartie sur l'ensemble $\{2, 3, \ldots, 12\}$.

Remarque. — Apparemment nous avons mené un raisonnement par l'absurde. Avec un tout petit effort de rédaction, on peut s'en affranchir facilement.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2004–05

BARÈME DE L'EXAMEN DE PROBABILITÉS, SECONDE SESSION

Mercredi 22 juin 2005, 9h00–12h00

Exercice 1. — 6 points.

(i) 2 points : 0.5 pt par réponse juste.

(ii) 2 points : 1 pt par réponse juste.

(iii) 2 points : 0.5 pt par réponse juste, 0.5 pt pour la notion de quantile d'une loi normale.

Exercice 2. — 10 points.

(i) 2 points : 0.5 pt par réponse juste.

(ii) 1 point : 0.5 pt pour la loi du couple, 0.5 pt pour la justification.

(iii) 3 points : 0.5 pt pour F_Z en dehors de $[0, 20]$, 1 pt pour des dessins justes, 1 pt pour des calculs justes, 0.5 pt pour la conclusion.

(iv) 1 point : 0.5 pt pour le résultat, 0.5pt pour le calcul et la rédaction.

(v) 1 point : 0.5 pt pour le résultat, 0.5pt pour le calcul et la rédaction.

(vi) 1 point : 0.5 pt pour le résultat, 0.5pt pour le calcul et la rédaction.

(vii) 1 point : 0.5 pt pour la formule des probabilités totales (évocation, formule), 0.5 pt rédaction et calcul (tenir compte de la cohérence.

Exercice 3. — 6 points.