Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2004–05

EXAMEN DE PROBABILITÉS
Jeudi 18 mai 2005, 13h30–16h30

Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice est autorisé à l'exclusion de tout autre matériel informatique. Les différents exercices sont indépendants. Pour tous les calculs — en particulier dans l'exercice 2 —, on distinguera avec précision les égalités (signe « = ») des approximations (signe « ≈ »); les résultats numériques doivent être donnés avec la précision accordée par l'emploi de la table; leurs unités, s'il y a lieu, devront être précisées. La rigueur et la clarté des réponses seront prises en compte dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1. — Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère deux variables aléatoires entières $X, Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ discrètes, indépendantes, toutes deux de lois géométriques de paramètres respectifs p et $q \in]0,1[$. Rappelons à toutes fins utiles que, pour X par exemple, cela signifie :

$$\mathbb{P}\{X > n\} = (1-p)^n, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soient Z, $Z' : \Omega \to \mathbb{N}^*$ les applications définies par $Z = \min(X, Y)$ et $Z' = \max(X, Y)$.

(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{Z = n\}$ est un événement, et qu'ainsi Z est une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{Z' = n\}$ est un événement, et qu'ainsi Z' est une variable aléatoire discrète. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z'.

Exercice 2. — À la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle, la taille des hommes français en âge d'être enrôlés dans l'armée avait pour distribution la loi d'une variable aléatoire réelle X de distribution normale de moyenne $\mu = 164\,\text{cm}$ et d'écart-type $\sigma = 6\,\text{cm}$.

(i) Déterminer la probabilité que X soit supérieur (ou égal) à 170 cm, puis la probabilité que X soit inférieur (ou égal) à 158 cm. En déduire les probabilités des événements $\{X \in [158\,\text{cm}, 170\,\text{cm}]\}$ et $\{|X - 164\,\text{cm}| > 6\,\text{cm}\}$.

(ii) À cette époque, pour appartenir à un certain corps d'armée,[1] la taille minimale était de 158 cm. *Sachant ceci*, calculer la probabilité que la taille d'un soldat de ce corps d'armée soit supérieure à 176 cm. Toujours sachant ceci, quelle est la probabilité qu'il soit de taille inférieure à 150 cm ?

(iii) Déterminer les quantiles $q_{1/4}$, $q_{1/2}$ et $q_{3/4}$ respectivement d'ordre 1/4, 1/2 et 3/4 de la distribution de X (premier quartile, médiane, troisième quartile, le quantile q_α d'ordre $\alpha \in]0,1[$ de la distribution de X étant l'inverse de α par la fonction de répartition de la loi de X, c'est-à-dire $\mathbb{P}\{X \leqslant q_\alpha\} = \alpha$).

(iv) Déterminer $q_{0,05}$ et $q_{0,95}$ tels que $\mathbb{P}\{X < q_{0,05}\} = 0{,}05$ et $\mathbb{P}\{X > q_{0,95}\} = 0{,}05$ — les personnes dont la taille n'était pas comprise entre ces deux valeurs étant considérées comme trop petites ou trop grandes pour être enrôlées.[2]

Exercice 3. — Deux personnes doivent se retrouver dans un intervalle de temps (continu) compris entre 0 et 60 minutes. Leurs dates d'arrivées respectives dans cet intervalle sont

1. Affirmation certainement fausse à usage purement pédagogique.
2. Même remarque que précédemment.

deux variables aléatoires X et Y indépendantes, toutes deux de loi uniforme sur $[0, 60]$. *Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire réduite.*

(i) Donner les probabilités des événements $\{X \leqslant 30\}$, $\{X \geqslant 40\}$, $\{X \in [5, 45]\}$, $\{X \in [50, 70]\}$.

(ii) Préciser quelle est la loi du couple (X, Y) en s'appuyant sur les hypothèses et les résultats énoncés en cours.

(iii) Déterminer, graphiques à l'appui, la fonction de répartition de la variable $Z = |X - Y|$.

(iv) Si l'une des deux personnes doit attendre plus de 20 minutes l'autre, elle s'en va. Déduire de la question précédente la probabilité que les deux personnes se rencontrent.

(v) Sachant que le rendez-vous a été manqué, calculer la probabilité que les deux personnes se soient ratées de moins de 10 minutes.

Annexe

La table suivante donne des valeurs de la fonction de répartition Φ de la loi Normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Elle permet d'évaluer $\Phi(z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ avec une précision *minimale* de 0,01, et aussi d'évaluer $\Phi^{-1}(\alpha)$ pour $\alpha \in]0, 1[$, avec une précision du même ordre pour $\alpha \in]0{,}0014\,;\, 0{,}9986[$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2004–05

CORRECTION DE L'EXAMEN DE PROBABILITÉS

Jeudi 18 mai 2005, 13h30–16h30

Exercice 1. — (i) Nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{Z = n\} = \{\min(X, Y) = n\} = (\{X = n, Y \geqslant n\} \cup \{X \geqslant n, Y = n\} = (\{X = n\} \cap \{Y \geqslant n\}) \cup (\{X \geqslant n\} \cap \{Y = n\})$. Puisque X et Y sont deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, les ensembles $\{X = n\}$, $\{Y \geqslant n\}$, $\{X \geqslant n\}$ et $\{Y = n\}$ sont des événements ; ainsi, par stabilité par intersection et réunion (finies ou dénombrables), $\{Z = n\}$ est un événement ; Z est donc une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Moins directement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{Z \geqslant n\} = \{X \geqslant n\} \cap \{Y \geqslant n\}$, qui est l'intersection de deux événements et est donc un événement ; puisque $\{Z = n\} = \{Z \geqslant n\} \backslash \{Z \geqslant n+1\} = \{Z \geqslant n\} \cap \{Z \geqslant n+1\}^c$, $\{Z = n\}$ est aussi un événement, et on conclut de même que Z est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $\{Z > n\} = \{X > n\} \cap \{Y > n\}$ qui est l'intersection de deux événements indépendants. Ainsi $\mathbb{P}\{Z > n\} = \mathbb{P}(\{X > n\} \cap \{Y > n\}) = \mathbb{P}\{X > n\} \times \mathbb{P}\{Y > n\} = (1-p)^n \times (1-q)^n = \big((1-p) \times (1-q)\big)^n = \big(1 - (p+q-pq)\big)^n$. Nous en déduisons que la variable aléatoire Z a pour loi la loi géométrique de paramètre $p + q - pq$.

(ii) Pour montrer que $Z' = \max(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète — évidemment à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ —, nous pouvons procéder comme précédemment : de manière directe, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons $\{Z' = n\} = \{\max(X, Y) = n\} = (\{X = n\} \cap \{Y \leqslant n\}) \cup (\{X \leqslant n\} \cap \{Y = n\})$ qui est donc un événement. Ceci montre que Z' est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $\{Z \leqslant n\} = \{X \leqslant n\} \cap \{Y \leqslant n\}$ qui est l'intersection de deux événements indépendants. Ainsi, $\mathbb{P}\{Z \leqslant n\} = \mathbb{P}\{X \leqslant n\} \times \mathbb{P}\{Y \leqslant n\} = (1 - \mathbb{P}\{X > n\}) \times (1 - \mathbb{P}\{Y > n\}) = (1-(1-p)^n) \times (1-(1-q)^n) = -(1-p)^n + (1-q)^n + ((1-p)(1-q))^n$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\{Z = n\} = \mathbb{P}\{Z \leqslant n\} - \mathbb{P}\{Z \leqslant n-1\} = -(1-p)^n + (1-q)^n + ((1-p)(1-q))^n + (1-p)^{n-1} + (1-q)^{n-1} + ((1-p)(1-q))^{n-1} = p(1-p)^{n-1} + q(1-q)^{n-1} - (p+q-pq)((1-p)(1-q))^{n-1}$. Soit

$$\mathbb{P}\{Z = n\} = p(1-p)^{n-1} + q(1-q)^{n-1} - (p+q-pq)((1-p)(1-q))^{n-1} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette dernière expression ne se simplifie pas particulièrement.

Remarque. — Une propriété commune des lois géométriques et exponentielles est l'absence de mémoire (voir cours, TD, etc.). Le minimum Z partage cette absence de mémoire par indépendance de X et de Y, sa loi ne pouvait donc qu'être géométrique. Le fait que le maximum ne suive pas une loi géométrique est aussi à rapprocher du cas exponentiel.

Exercice 2. — Nous notons $\mu = 164\,\text{cm}$, $\sigma = 6\,\text{cm}$ et X une variable aléatoire réelle de loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ. Rappelons qu'alors la variable aléatoire $(X - \mu)/\sigma$ a pour loi la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

(i) Nous avons :

- $\mathbb{P}\{X \geqslant 170\} = \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \geqslant (170-164)/6\} = \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \geqslant 1\} = 1 - \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma < 1\} = 1 - \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \leqslant 1\} = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$;

- $\mathbb{P}\{X \leqslant 158\} = \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \leqslant (158-164)/6\} = \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \leqslant -1\} = \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \geqslant 1\} = 0{,}1587$ par symétrie de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ par rapport à 0 ;
- $\mathbb{P}\{X \in [158,170]\} = \mathbb{P}\{X \leqslant 170\} - \mathbb{P}\{X < 158\} = \mathbb{P}\{X < 170\} - \mathbb{P}\{X \leqslant 158\} = 1 - \mathbb{P}\{X \geqslant 170\} - \mathbb{P}\{X \leqslant 158\} \approx 1 - 0{,}1587 - 0{,}1587 \approx 0{,}6826$;
- $\mathbb{P}\{|X-164| > 6\} = 1 - \mathbb{P}\{|X-164| \leqslant 6\} = 1 - \mathbb{P}\{-6 \leqslant X - 164 \leqslant 6\}1 - \mathbb{P}\{158 \leqslant X \leqslant 170\} = 1 - \mathbb{P}\{X \in [158,170]\} \approx 0{,}3174$.

(ii) Considérons l'événement $B = \{X \geqslant 158\}$. Nous avons $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\{X \geqslant 158\} \approx 0{,}8413$ d'après les calculs précédents. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X \geqslant 176 \,|\, X \geqslant 158\} &= \frac{\mathbb{P}\{X \geqslant 176\}}{\mathbb{P}\{X \geqslant 158\}} = \frac{\mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \geqslant (176-164)/6\}}{\mathbb{P}\{X \geqslant 158\}} \\
&= \frac{\mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \geqslant 2\}}{\mathbb{P}\{X \geqslant 158\}} = \frac{\mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma > 2\}}{\mathbb{P}\{X \geqslant 158\}} \\
&= \frac{1 - \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \leqslant 2\}}{\mathbb{P}\{X \geqslant 158\}} = \frac{1-\Phi(2)}{\mathbb{P}\{X \geqslant 158\}} \\
&\approx \frac{1-0{,}9772}{0{,}8413} = \frac{0{,}0228}{0{,}8413} \approx 0{,}0271 \approx 0{,}027.
\end{aligned}$$

Puisque $\{X \leqslant 150\} \cap \{X \geqslant 158\} = \varnothing$, nous avons $\mathbb{P}\{X \leqslant 150 \,|\, X \geqslant 158\} = 0$.

(iii) Rappelons que pour tout $\alpha \in]0,1[$, le quantile q_α d'ordre α de la distribution de X est donné par :

$$q_\alpha = \sigma \times \Phi^{-1}(\alpha) + \mu = 6 \times \Phi^{-1}(\alpha) + 164.$$

En effet, $\alpha = \mathbb{P}\{X \leqslant q_\alpha\} = \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \leqslant (q_\alpha - \mu)/\sigma\} = \Phi((q_\alpha - \mu)/\sigma)$. Donc $(q_\alpha - \mu)/\sigma = \Phi^{-1}(\alpha)$ puisque Φ est inversible de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$.

Nous savons que $\Phi^{-1}(0{,}25) = -\Phi^{-1}(0{,}75)$ par symétrie, $\Phi^{-1}(0{,}5) = 0$, et d'après la table, $\Phi^{-1}(0{,}75)$ est strictement compris entre 0,67 et 0,68, ainsi nous retenons $\Phi^{-1}(0{,}75) \approx 0{,}67$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
q_{1/4} &= 6 \times \Phi^{-1}(0{,}25) + 164 \approx -6 \times 0{,}67 + 164 \approx 159{,}98 \approx 160\,\text{cm} \qquad (159{,}95\,\text{cm}) \\
q_{1/2} &= 6 \times \Phi^{-1}(0{,}5) + 164 = 6 \times 0 + 164 = 164\,\text{cm} \\
q_{3/4} &= 6 \times \Phi^{-1}(0{,}75) + 164 \approx 6 \times 0{,}67 + 164 \approx 168{,}02 \approx 168\,\text{cm} \qquad (168{,}05\,\text{cm}).
\end{aligned}$$

(iv) Les valeurs $q_{0{,}05}$ et $q_{0{,}95}$ sont respectivement les quantiles d'ordre 0,05 et 0,95 de la loi de X. Comme précédemment, $\Phi^{-1}(0{,}05) = -\Phi^{-1}(0{,}95)$, et d'après la table $\Phi^{-1}(0{,}95)$ est strictement compris entre 1,64 et 1,65. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned}
q_{0{,}05} &= 6 \times \Phi^{-1}(0{,}95) + 164 \approx -6 \times 1{,}65 + 164 \approx 154{,}1 \approx 154\,\text{cm} \qquad (154{,}13\,\text{cm}) \\
q_{0{,}95} &= 6 \times \Phi^{-1}(0{,}05) + 164 \approx 6 \times 1{,}65 + 164 \approx 173{,}9 \approx 174\,\text{cm} \qquad (173{,}87\,\text{cm}).
\end{aligned}$$

Exercice 3. — (i) Nous avons :

- $\mathbb{P}\{X \leqslant 30\} = \mathbb{P}\{X \in [0,30]\} = (30-0)/60 = 1/2$;
- $\mathbb{P}\{X \geqslant 40\} = \mathbb{P}\{X \in [40,60]\} = (60-40)/60 = 1/3$;
- $\mathbb{P}\{X \in [5,45]\} = (45-5)/60 = 2/3$;
- $\mathbb{P}\{X \in [50,70]\} = \mathbb{P}\{X \in [50,60]\} = (60-50)/60 = 1/6$.

(ii) Puisque les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X,Y) est alors la loi produit des lois de X et de Y, c'est-à-dire la loi uniforme sur le carré $[0,60]^2$.

Une autre façon de voir est de passer par les densités : les lois de X et de Y sont identiques et admettent pour densité sur $\mathbb{R}$ la fonction $p : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[0,60]}(x)/60$. Puisque de plus X et

Y sont indépendantes, nous savons d'après le cours, que la loi du couple (X, Y) sur $\mathbb{R}^2$ admet une densité donnée par le produit des densités de chacune des composantes :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{60}\mathbb{1}_{[0,60]}(x) \times \frac{1}{60}\mathbb{1}_{[0,60]}(y) = \frac{1}{60^2}\mathbb{1}_{[0,60]^2}(x, y)$$

qui est bien la densité de la loi uniforme sur le carré $[0, 60]^2$.

(iii) Soit $Z = |X - Y|$. C'est une variable aléatoire à valeurs dans $[0, 60]$ et sa fonction de répartition F_Z est donnée par

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant 0, \\ 1 - ((60 - z)/60)^2 = 1 - (1 - z/60)^2 & \text{si } z \in [0, 60], \\ 1 & \text{si } z \geqslant 60. \end{cases}$$

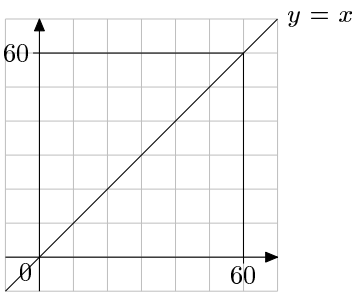
En effet, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

$$\{Z \leqslant z\} = \{|X - Y| \leqslant z\} = \{-z \leqslant Y - X \leqslant z\} = \{X - z \leqslant Y \leqslant X + z\}$$

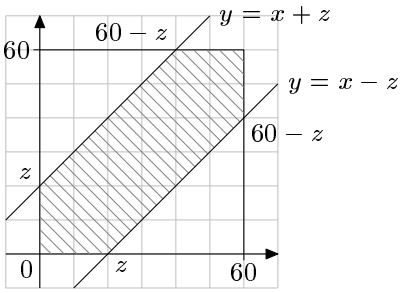
événement dont la probabilité est l'aire normalisée du domaine

$$\{(x, y) \in [0, 60]^2 : x - z \leqslant y \leqslant x + z\}$$

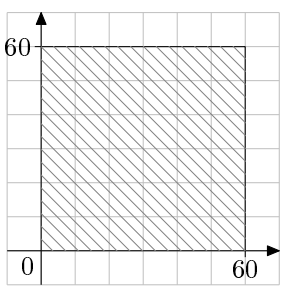
qui est nulle si $z \leqslant 0$, égale à 1 si $z \geqslant 60$, et égale à 1 diminué de l'aire normalisée des deux triangles restants lorsque $0 < z < 60$.



$z = 0$



$0 < z < 60$



$z \geq 60$

(iv) L'événement « les deux personnes se rencontrent » est égal à $\{Z \leqslant 20\}$ dont la probabilité est

$$F_Z(20) = 1 - (1 - 20/60)^2 = 1 - (1 - 1/3)^2 = 1 - (2/3)^2 = 1 - 4/9 = 5/9.$$

Remarque. — Ce dernier résultat est plus grand que $1/2$, ce qui n'est pas forcément immédiat.

(v) L'événement « le rendez-vous a été manqué » est $B = \{Z > 20\}$, l'événement « les personnes se sont ratées de moins de dix minutes » est alors $A = \{Z \leqslant 30\}$ et nous cherchons la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A \,|\, B)$.

Nous avons $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}\{Z \leqslant 20\} = 4/9$ et $\mathbb{P}(A) = F_Z(30) = 1 - ((60 - 30)/60)^2 = 1 - (30/60)^2 = 1 - (1/2)^2 = 1 - 1/4 = 3/4$. De plus $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B^c) = 3/4 - 5/9 = 7/36$ puisque $B^c \subset A$. Finalement

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{7/36}{4/9} = 7/16.$$

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2004–05

BARÈME DE L'EXAMEN DE PROBABILITÉS
Jeudi 18 mai 2005, 13h30–16h30

Exercice 1. — 6 points.

(i) 3 points : événement [1 pt] (décomposition totale pour moitié, si elle n'est que partielle, n'attribuer que la fraction correspondante, si elle est fausse ne rien attribuer, préciser que les briques sont des événements car X et Y sont des variables discrètes pour 1/4, dire que c'est une réunion d'intersections d'événements pour 1/4), Z v.a. [1/2 pt] (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$..., donc...), calcul [1 pt] (posé clairement [soit n...] pour 1/4, conduite avec les précisions qu'il faut 1/4, résultat 1/2) nom et paramètre de la loi [1/2 pt] (si ce n'est pas cohérent avec le calcul précédent, ne rien donner).

(ii) 3 points : événement (voir précédemment) [1 pt], Z' v.a. (voir précédemment) [1/2 pt], calcul [1.5 pt] (1/4 de point pour poser le calcul, 1/4 de point pour la rédaction, 1/2 point pour une étape significative du calcul, 1/2 point pour le résultat exact).

Exercice 2. — 8 points.

(i) 2 points : 1/2 pt par réponse, moitié pour rédaction (clarté [1/8 pt], justesse des signes d'égalité [1/8 pt]), moitié pour résultat.

(ii) 2 points : identification d'une probabilité conditionnelle [1/4 pt], expression de la probabilité conditionnelle [1/4 pt], calcul du numérateur [1/4 pt], du dénominateur [1/4 pt], résultat [1/2 pt]. La rédaction et la justesse des égalités comptent respectivement pour 1/4 de chaque calcul si il y a, la rédaction pour 1/4 lorsqu'il n'y a pas de calcul. $\mathbb{P}\{X \leqslant 150 \,|\, X \geqslant 158\}$, résultat [1/4 pt], explication [1/4 pt].

(iii) 2 points : méthode [1/2 pt], premier quartile [1/2 pt], médiane [1/2 pt], troisième quartile [1/2 pt] (les unités comptent pour 1/4, la justesse des égalités pour 1/4, le résultat pour 1/4, la clarté pour 1/4, soit à chaque fois 1/8 pt).

(iv) 2 points : chaque résultat [1 pt] (les unités comptent pour 1/4, la justesse des égalités pour 1/4, le résultat pour 1/4, la clarté pour 1/4, soit à chaque fois 1/4 pt).

Exercice 3. — 6 points.

(i) 1 point : chaque résultat [1/4 pt] (seul le résultat compte).

(ii) 1 point : mention de l'indépendance [1/4 pt], mention de loi produit [1/4 pt], loi uniforme sur $[0, 60]^2$ [1/2 pt].

(iii) 1.5 points : Résultat clairement exprimé [1/2 pt] (ne prendre qu'une fraction si incomplet ou peu clair), graphiques [1/2 pt] (ne prendre qu'une fraction si incomplet ou peu clair), rédaction générale [1/2 pt].

(iv) 1 point : probabilité à calculer [1/4 pt], calcul [1/4 pt], résultat [1/2 pt] (tenir compte de la cohérence avec ce qui précède).

(v) 1.5 points : identification de la probabilité conditionnelle [1/2 pt], calcul [1/2 pt], résultat [1/2 pt].

Remarque. — Un peu de clémence aura été accordée dans le cas d'erreurs répétées (signes d'égalités et approximations, omission d'unités, etc.).

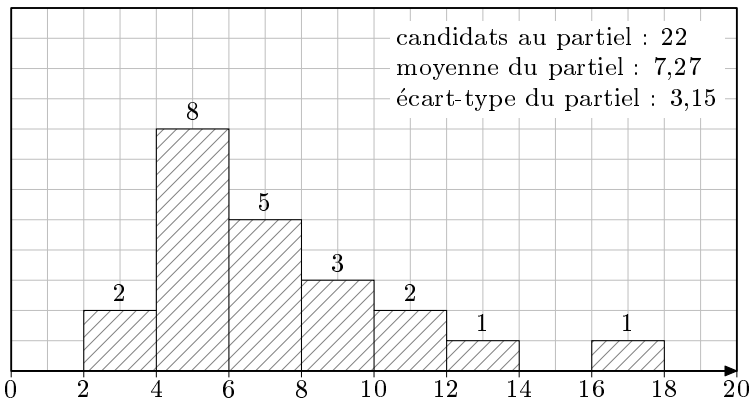
Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2004–05

RÉSULTATS AVANT SECONDE SESSION

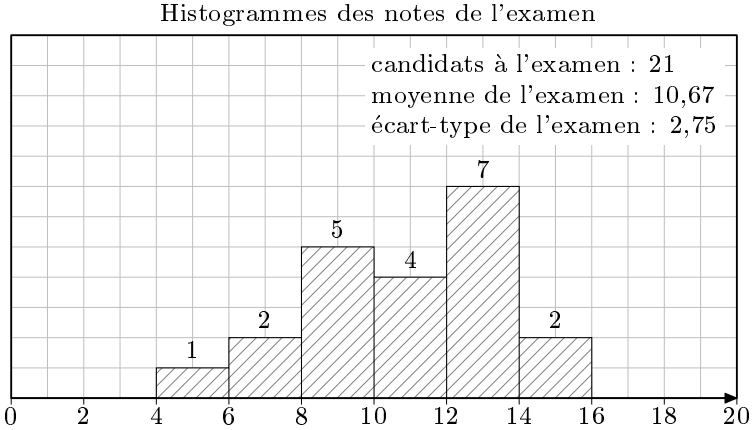
Les relevés de notes du partiel du 9 mars 2005 donnent un histogramme on ne peut plus classique : unimodalité, dissymétrie positive, ...

Histogrammes des notes du partiel



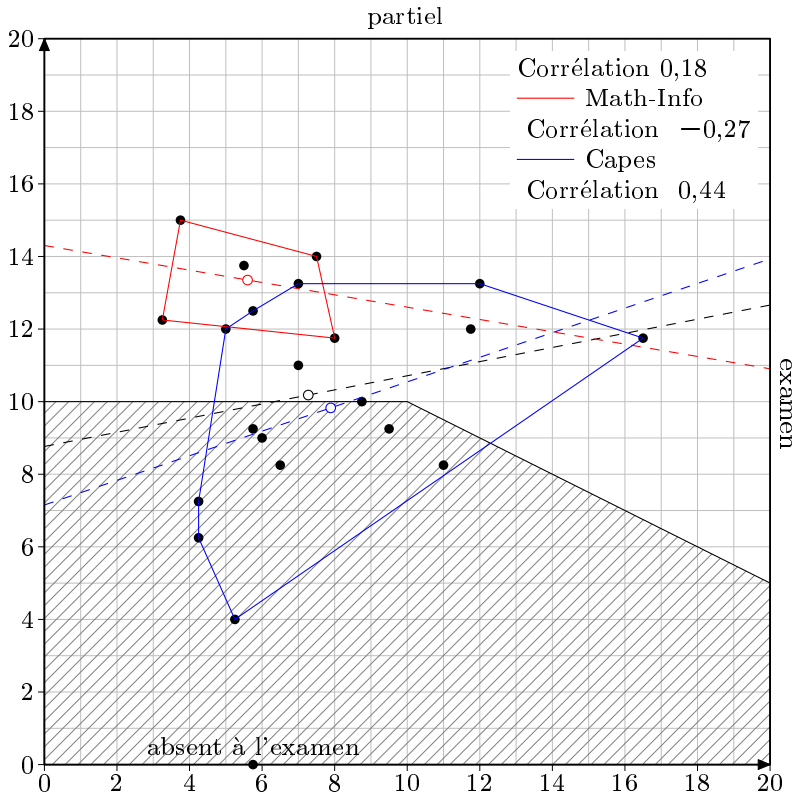
L'histogramme des notes de l'examen n'est pas aussi homogène. Le sujet ne présentant aucune originalité par rapport aux TD, on pourra conclure ce qu'il faut à propos de la bimodalité de cet histogramme. L'examen étant très facile — ou bien moins théorique —, la dissymétrie est opposée : on parvient facilement, mais plafonne, à des notes autour de la moyenne.

Histogrammes des notes de l'examen



Il est amusant de regarder les notes partiel/examen de manière bidimensionnelle et de séparer

les deux options math-info/capes :



Le cas du groupe math-info est particulièrement remarquable et devrait servir d'exemple à d'autres...