Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

FEUILLE D'EXERCICES N° 1.
DÉNOMBREMENT
ET CALCUL ÉLÉMENTAIRE DES PROBABILITÉS

Exercice 1. — Rappelons qu'un ensemble E est fini si :

— ou bien c'est l'ensemble vide $E = \varnothing$,

— ou bien il existe un entier n tel qu'il existe une bijection entre E et $\{1, \dots, n\}$.

L'entier n est unique ($n = 0$ si $E = \varnothing$). Il est appelé cardinal de l'ensemble E et est noté $\operatorname{Card} E$ (ou encore $|E|$, $\#E$).

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer les cardinaux de :

(i) l'ensemble des suites de longueur p à valeurs dans E ;

(ii) l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E ;

(iii) l'ensemble des suites injectives de longueur p à valeurs dans E (ensemble des p-arrangements) ;

(iv) l'ensemble $\mathcal{P}_p(E)$ des parties à p éléments de E (ensemble des p-combinaisons) ;

(v) l'ensemble des suites strictement croissantes de longueur p à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$;

(vi) l'ensemble des suites croissantes au sens large de longueur p à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$, en déduire le nombre de solutions de $x_1 + \cdots + x_p = n$, x_i entier positif.

(vii) l'ensemble des suites de longueur p contenant n_1 fois 1, …, n_k fois k où $n_1 + \cdots + n_k = p$, en déduire la formule du multinôme :

$$(z_1 + \cdots + z_k)^p = \sum_{\substack{n_1 \geqslant 0, \dots, n_k \geqslant 0 \\ n_1 + \cdots + n_k = p}} \frac{p\,!}{n_1\,! \dots n_k\,!}\, z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k}.$$

Exercice 2. — (i) On jette 4 dés (distinguables). Combien y a-t-il :

- de résultats possibles,
- de carrés (exemple : $\boxdot_1\boxdot_2\boxdot_3\boxdot_4$),
- de brelans (exemple : $\boxdot_1\boxdot_2\boxdot_3\boxdot_4$),
- de doubles paires (distinctes) (exemple : $\boxdot_1\boxdot_2\boxdot_3\boxdot_4$),
- de paires simples (exemple : $\boxdot_1\boxdot_2\boxdot_3\boxdot_4$),
- et de dispositions banales (exemple : $\boxdot_1\boxdot_2\boxdot_3\boxdot_4$) (parmi ces dernières, on pourrait aussi distinguer les suites) ?

Vérifier la cohérence des différents résultats.

(ii) En déduire la probabilité des événements correspondants dans le cadre d'un modèle probabiliste qu'on précisera.

(iii) On pourra poursuivre l'exercice en considérant le cas de 5 dés où on distinguera les quintes, les carrés, les fulls (paire et triplet de marques distinctes), les paires doubles, triplets simples, les paires simples, et finalement les dispositions banales (parmi ces dernières, on pourrait aussi distinguer les suites).

Exercice 3. — (i) On tire au hasard 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Après avoir décrit le modèle probabiliste envisagé, calculer la probabilité pour qu'il y ait exactement 2 reines.

(ii) Même question pour un tirage avec remise.

Exercice 4. — On jette deux dés équilibrés et on note X la somme des valeurs des deux faces amenées. Décrire le modèle probabiliste classique correspondant à cette expérience aléatoire. Déterminer l'ensemble des valeurs possibles de la variable aléatoire X, sa loi et son espérance, c'est-à-dire sa moyenne. (Si la notion d'espérance de variable aléatoire n'a pas encore été introduite de manière formelle, on proposera une expression raisonnable de cette quantité.)

Exercice 5. — Sur une étagère, on place *au hasard* 3 CD-ROM, 4 CD de musique et 2 DVD. Quelle est la probabilité que les disques de chacun des trois types soient regroupés ?

Exercice 6. — Trois dés (distinguables) sont truqués de sorte que, pour chaque dé, la probabilité de sortir le 1 est deux fois plus grande que celle de sortir n'importe quel autre nombre. Quelle est la probabilité de sortir au cours d'un lancer de ces trois dés un 421 ? Quelle serait cette probabilité si les dés n'étaient pas truqués ?

Exercice 7. — Une armoire contient 10 paires de chaussures. On choisit au hasard 8 chaussures parmi les 20.

(i) Quelle est la probabilité que parmi ces 8 chaussures ne figure aucune paire ?

(ii) Quelle est la probabilité que parmi ces 8 chaussures figure exactement une paire ?

Exercice 8. — Quelle est la probabilité que parmi n personnes choisies *au hasard* il n'y en ait pas au moins deux qui aient le même jour anniversaire ? Quelle doit être la valeur minimale de n pour que cette probabilité soit inférieure à $1/2$? (Une partie de la réponse sera obtenue à l'aide d'une calculatrice programmable.)

Exercice 9. — On lance 3 dés équilibrés. Montrer que la probabilité pour que la somme des points amenés soit strictement supérieure à 10 est égale à la probabilité que cette somme soit inférieure ou égale à 10.

Exercice 10. — Un couple désire avoir un garçon mais ne veut ou ne peut avoir plus de 4 enfants, aussi les parents potentiels prévoient d'avoir des enfants jusqu'à ce qu'ils aient un garçon ou que leur nombre total d'enfants atteint la limite. Préciser le modèle probabiliste traduisant cette stratégie.

L'application de cette stratégie par un grand nombre de couples conduirait-elle à ce qu'il y ait plus de gaçons que de filles ?

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{O}}$ 2
FORMULE DU CRIBLE DE POINCARÉ

EXERCICE 1. — (i) Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

(ii) Six personnes — M & M$^{\text{me}}$ X, M & M$^{\text{me}}$ Y, et M & M$^{\text{me}}$ Z — sont rangées *au hasard* en une file d'attente dont les emplacements sont numérotés de 1 à 6. Quelle est la probabilité pour qu'aucun des couples X, Y et Z, le mari et l'épouse n'occupent deux emplacements voisins dans la file d'attente ?

(iii) Traiter la question précédente en supposant les six personnes rangées *au hasard* autour d'une table.

EXERCICE 2. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Établir la formule du crible de Poincaré : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

EXERCICE 3. — N personnes déposent leur carte de visite dans un chapeau. Puis, chacune de ces personnes tire *au hasard* une de ces cartes de visite.

(i) Quelle est la probabilité qu'aucune de ces personnes tire sa propre carte de visite ?

(ii) Quelle est la probabilité que k personnes tirent leur propre carte de visite ?

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

FEUILLE D'EXERCICES N° 3
SCHÉMAS DE BERNOULLI

Préambule. — Un schéma de Bernoulli (fini) est la répétition (n fois) d'une expérience aléatoire ayant un nombre fini d'issues possibles, les n expériences étant identiques mais réalisées de manière indépendante. Nous nous contenterons de considérer que deux issues possibles : {succès, échec}, {pile, face}, ou encore $\{1, 0\}$. Notons qu'on peut *réduire* tout schéma de Bernoulli à un schéma de Bernoulli à deux issues possibles : il suffit de classer certaines issues parmi les succès et les autres parmi les échecs. Cependant, après réduction, on ne peut pas retrouver toute l'information de départ.

Notations. — Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Nous notons Ω_n l'ensemble des suites de 0 ou de 1 de longueur n. Pour chaque $\omega \in \Omega_n$, nous définissons :

- $X_n(\omega)$ le nombre de 1 dans la suite ω ;
- $Y_n(\omega) = n - X_n(\omega)$ le nombre de 0 dans la suite ω ;
- $T_n(\omega)$ le premier rang d'apparition d'un 1 dans la suite ω (on convient que $T_n(\omega) = \infty$ si ω ne comporte que des 0) ;
- $(T_n \wedge n)(\omega) = \min(T_n(\omega), n)$ le premier rang d'apparition d'un 1 dans la suite ω si elle en comporte, n sinon.

Les ensembles finis sont supposés munis de leurs tribus discrètes. Ainsi les applications X_n, Y_n, T_n, $T_n \wedge n$ de Ω_n dans leurs ensembles image respectifs sont mesurables.

1. **Un modèle de schémas de Bernoulli symétriques**

Nous supposons dans cette section l'espace mesurable $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n))$ muni de sa mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}_n$:

$$A \subset \Omega_n, \qquad \mathbb{P}_n(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega_n} .$$

On admettra que l'espace probabilisé $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbb{P}_n)$ décrit un schéma de Bernoulli symétrique, c'est-à-dire un schéma de Bernoulli pour lequel les deux issues ont une même probabilité de se réaliser.

1.1. Quelques cas particuliers

Pour successivement $n = 2, 3, 4$:

- écrire la liste des éléments de Ω_n ;
- écrire les événements $\{X_n = k\}$, $k = 0, \ldots, n$, comme les listes de leurs éléments ;
- présenter la loi de X_n sous la forme d'un tableau et donner son espérance ;
- écrire les événements $\{T_n \wedge n = k\}$, $k = 1, \ldots, n$, comme les listes de leurs éléments ;
- présenter la loi de $T_n \wedge n$ sous la forme d'un tableau et calculer son espérance.

1.2. Cas général

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

- Déterminer la loi de X_n (on exprimera $\mathbb{P}_n\{X_n = k\}$ en fonction de n et de k) ; donner son espérance.
- Déterminer la loi de $T_n \wedge n$ (on exprimera $\mathbb{P}_n\{T_n \wedge n = k\}$ en fonction de n et de k) ; Calculer son espérance.

2. Un modèle de schémas de Bernoulli

Soient n un entier supérieur ou égal à 1 et $p \in [0,1]$ un nombre réel fixés. L'espace mesurable $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n))$ est muni de la mesure de probabilité $\mathbb{P}_n$ définie par ses valeurs sur les singletons :

$$\omega \in \Omega_n, \qquad \mathbb{P}_n\{\omega\} = p^k(1-p)^{n-k} \qquad \text{où } k = X_n(\omega) \text{ est le nombre de 1 dans la suite } \omega.$$

- Déterminer la loi de X_n ; calculer son espérance.
- En déduire la loi de Y_n ainsi que son espérance.
- Déterminer la loi de $T_n \wedge n$; calculer son espérance.
- Retrouver les résultats précédents lorsque $p = 1/2$.

3. Plus généralement

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Soient A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$. Montrer que si $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$ alors $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2^c) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2^c)$. En déduire que A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$ sont indépendants si et seulement si les tribus $\sigma(A_1)$ et $\sigma(A_2)$ le sont, ou encore si et seulement si les variables aléatoires $\xi_1 = \mathbb{1}_{A_1}$ et $\xi_2 = \mathbb{1}_{A_2}$ sont indépendantes.
- En déduire, pour $n \geqslant 2$, que $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ sont indépendants si et seulement si les tribus $\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_n)$ le sont, ou encore si et seulement si les variables aléatoires $\xi_1 = \mathbb{1}_{A_1}$, …, $\xi_n = \mathbb{1}_{A_n}$ sont indépendantes.

Soient $n \geqslant 2$ et $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ des événements indépendants de même probabilité $p \in [0,1]$. Posons $\xi_i = \mathbb{1}_{A_i}$, $i = 1, \ldots, n$, et $X = \xi_1 + \cdots + \xi_n$.

- Déterminer la loi de la variable aléatoire

$$\begin{aligned} \xi : \Omega &\longrightarrow \Omega_n \\ \omega &\longmapsto \xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_n(\omega)) \end{aligned}$$

- En déduire la loi de X.
- En se servant de la linéarité de l'espérance, retrouver l'espérance de X.

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{O}}$ 4
PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Exercice 1. — (i) Un père de famille déclare avoir deux enfants. Calculer la probabilité pour que les deux enfants soient des garçons, sachant que

a) l'un au moins est un garçon ;

b) l'aîné est un garçon.

(ii) On choisit *au hasard* un enfant dans une famille de deux enfants. Sachant que l'enfant choisi est une fille, calculer la probabilité pour que les deux enfants soient des filles.

Exercice 2. — Dans une usine, trois machines M_1, M_2 et M_3 fabriquent des boulons de même type. Cependant

a) la machine M_1 produit en moyenne 0,3 % de boulons défectueux,

b) la machine M_2 produit en moyenne 0,8 % de boulons défectueux,

c) la machine M_3 produit en moyenne 1 % de boulons défectueux.

On mélange 1000 boulons dans une caisse, 500 provenant de M_1, 350 de M_2 et 150 de M_3. On tire un boulon *au hasard*, il est défectueux. Calculer les probabilités qu'il ait été fabriqué par M_1, puis par M_2, enfin par M_3.

Exercice 3. — Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et E et $M \in \mathcal{A}$ deux événements tels que $\mathbb{P}(E \cap M) > 0$, $\mathbb{P}(E \cap M^c) > 0$, $\mathbb{P}(E^c \cap M) > 0$ ainsi que $\mathbb{P}(E^c \cap M) > 0$. Nous notons $\pi_1 = \mathbb{P}(M \,|\, E)$, $\pi_2 = \mathbb{P}(M \,|\, E^c)$, $\pi_1' = \mathbb{P}(E \,|\, M)$, $\pi_2' = \mathbb{P}(E \,|\, M^c)$, et finalement

$$o\varrho = \frac{\pi_1/(1-\pi_1)}{\pi_2/(1-\pi_2)}\,.$$

(i) Montrer que $\pi_1 > \pi_2$ équivaut à $o\varrho > 1$.

(ii) Montrer que

$$o\varrho = \frac{\pi_1'/(1-\pi_1')}{\pi_2'/(1-\pi_2')}\,.$$

(iii) En déduire que $\pi_1 > \pi_2$ équivaut à $\pi_1' > \pi_2'$.

Remarque. — Évidemment on a des équivalences semblables en ce qui concerne les égalités ou les inégalités opposées. Ce type de quantité apparaît fréquemment dans des études statistiques médicales. le « M » désigne un ensemble plus ou moins théorique de malades et le « E » désigne un ensemble plus ou moins théorique d'individus exposé à un traitement ou à un produit dangereux...

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

FEUILLE D'EXERCICES N$^{\text{O}}$ 5
VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Les exercices portent sur des variables aléatoires discrètes et sur les lois discrètes usuelles. On pourra vérifier à cette occasion que la somme des probabilités des valeurs possibles est égale à 1 et calculer quelques espérances.

EXERCICE 1. — Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X+Y$ (on calculera directement $\mathbb{P}\{X+Y=k\}$). Peut-on avoir une conclusion semblable si Y suit la loi $\mathcal{B}(m,q)$ avec $q \neq p$?

EXERCICE 2. — On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Montrer que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$ (on calculera directement $\mathbb{P}\{X+Y=n\}$).

EXERCICE 3. — Le nombre N d'œufs pondus par un insecte est une variable aléatoire de loi la loi de Poisson de paramètre m. Sachant $N=n$, pour $k=1,\ldots,n$, la probabilité que le k-ième œuf se développe est $p \in]0,1[$, et on suppose que les n œufs se développent indépendamment les uns des autres. Soit X le nombre de descendants survivants d'un insecte donné. Déterminer la loi de X.

EXERCICE 4. — On tire au sort une variable aléatoire Z en deux temps de la façon suivante : on tire d'abord une variable aléatoire X selon la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$; le tirage ayant donné la valeur $X=x$, on tire ensuite la variable aléatoire Z selon la loi $\mathcal{B}(x,q)$. Montrer que Z obéit à la loi $\mathcal{B}(n,pq)$.

EXERCICE 5. — Guy est distrait. Quand il s'arrête pour prendre de l'essence, il y a une chance sur cinq pour qu'il reparte sans sa passagère, descendue pour visiter les lieux. Soit X le nombre d'étapes que Guy parcourt avec sa passagère.

(i) Déterminer la loi de X et son espérance.

(ii) Calculer le nombre d'étapes que peut comporter le voyage pour que la passagère arrive à destination avec une probabilité supérieure ou égale à 0,6.

EXERCICE 6. — Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi la loi géométrique de paramètre p ($p \in]0,1[$). Calculer $\mathbb{P}\{X=Y\}$. Que vaut-elle lorsque $p=1$ et lorsque $p=0$?

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

FEUILLE D'EXERCICES N° 6
VARIABLES ALÉATOIRES DE LOIS ABSOLUMENT CONTINUES

Ces exercices portent sur des variables aléatoires dont la loi admet une densité. On pourra vérifier que l'intégrale de ces densités vaut 1 et là aussi calculer quelques espérances.

Exercice 1. — Soit Y une variable aléatoire uniformément répartie sur $]0,5[$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation

$$4x^2 + 4xY + Y + 4 = 0$$

soient réelles ?

Exercice 2. — La durée de vie — exprimée en milliers de kilomètres parcourus — d'une voiture de type donné est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $1/60$. M Dupont possède un tel véhicule qui affiche 50 000 km au compteur ; il revend ce véhicule à M Durand. Quelle est la probabilité que M Durand profite de cette voiture pendant au moins 45 000 km supplémentaires ?

Exercice 3. — Soit X une variable aléatoire à valeurs positives telle que

$$0 < \mathbb{P}\{X > t\} < 1, \qquad \text{pour tout } t > 0,$$

et possédant la propriété d'absence de mémoire :

$$\mathbb{P}\{X > s + t \,|\, X > t\} = \mathbb{P}\{X > s\}, \qquad \text{pour tous } s \geqslant 0 \text{ et } t \geqslant 0.$$

Montrer que X a pour loi une loi exponentielle. (*Indication :* considérer la fonction g définie par $g(t) = \mathbb{P}\{X > t\}$ et commencer par exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $g(nt)$ à l'aide de $g(t)$, puis $g(1/n)$ à l'aide de $g(1)$, en déduire $g(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}_+$, puis $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$.)

Exercice 4. — Soient S et T deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(S,T)$. Interpréter ce résultat avec la propriété d'absence de mémoire. Constater que cette propriété n'est pas partagée par $V = \max(S,T)$.

Exercice 5. — Soit X une variable aléatoire de loi la loi normale de moyenne 5 et de variance 4. À l'aide des tables, calculer $\mathbb{P}\{X \leqslant 7\}$, $\mathbb{P}\{X > 6\}$, $\mathbb{P}\{4 \leqslant X \leqslant 8\}$, $\mathbb{P}\{|X-5| > 2\}$, $\mathbb{P}\{|X| < 4\}$. Déterminer les différentes valeurs de x pour lesquelles : $\mathbb{P}\{X \leqslant x\} = 0{,}95$, $\mathbb{P}\{X \leqslant x\} = 0{,}25$, $\mathbb{P}\{|X-5| \leqslant x\} = 0{,}5$, $\mathbb{P}\{|X-5| > x\} = 0{,}75$.

Exercice 6. — On dispose d'une cible circulaire de centre O et de rayon R. On suppose que tous les tirs atteignent la cible et que la probabilité d'atteindre une partie de la cible est proportionnelle à la surface de cette partie. On effectue un tir. Soit X la distance d'un point d'impact à O. Déterminer la fonction de répartition et une densité de la loi de X. Calculer $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 7. — Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux uniformément réparties sur $[0,1]$. Déterminer les fonctions de répartition respectives des variables

aléatoires : $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$, $X+Y$, X/Y (celle-ci est-elle bien définie ?), $|X-Y|$. Calculer — lorsqu'elles existent — l'espérance et la variance de ces variables aléatoires.

Exercice 8. — Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{N}(0,1)$. Le couple (X,Y) étant considéré comme les coordonnées d'un point aléatoire du plan, on passe en coordonnées polaires : $X = R\cos\Theta$ et $Y = R\sin\Theta$, où $R^2 = X^2 + Y^2$ et Θ est à valeurs dans $[0, 2\pi[$.

(i) Montrer que R et Θ sont indépendantes et déterminer leurs lois respectives.

(ii) En déduire une méthode pratique pour simuler une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, puis, plus généralement, de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

DEVOIR N° 1 DE PROBABILITÉS

À remettre le 14 février 2006

Soient M, m et n trois entiers strictement positifs tels que $M+m-n \geqslant 0$. Nous considérons l'ensemble Ω des chemins ω issus de M et comportant m pas positifs et n pas négatifs, *i.e.*, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} M &= \omega(0), \\ m &= \mathrm{Card}\big\{k \in \{1,\dots,m+n\} : \omega(k)-\omega(k-1) = +1\big\}, \\ n &= \mathrm{Card}\big\{k \in \{1,\dots,m+n\} : \omega(k)-\omega(k-1) = -1\big\}. \end{aligned}$$

1. Déterminer le cardinal de Ω, et $\omega(m+n)$ pour $\omega \in \Omega$.

2. Soit $C = \{\omega \in \Omega : \exists\, k \in \{0,1,\dots,n+m\}$ tel que $\omega(k) = 0\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (M,m,n) pour que $C = \varnothing$.

3. Nous supposerons dans la suite que $C \neq \varnothing$. Pour $\omega \in C$, notons $k_0(\omega) = \inf\{k \in \{0,1,\dots,m+n\} : \omega(k) = 0\}$; nous posons alors

$$\widetilde{\omega} = \begin{cases} -\omega(k) & \text{si } k \leqslant k_0(\omega) \\ \omega(k) & \text{si } k > k_0(\omega), \end{cases}$$

et nous notons $\widetilde{C} = \{\widetilde{\omega} : \omega \in C\}$. Caractériser les éléments de $\widetilde{C}$ par trois entiers $\widetilde{M}$, $\widetilde{m}$ et $\widetilde{n}$, et montrer que C et $\widetilde{C}$ sont en bijection.

4. Munissons $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Déterminer $\mathbb{P}(C)$.

Cent personnes font la queue devant une caisse de cinéma. La place coûte 5 €. Soixante personnes n'ont en poche qu'une pièce de 5 € ; les quarante autres personnes n'ont chacune qu'une pièce de 10 €.

5. Exprimer en fonction du nombre N de pièces de 5 € dans le tiroir-caisse à l'ouverture la probabilité que la vente soit interrompue par l'impossibilité de rendre la monnaie. (*Indication* : on prendra $m = 60$, $n = 40$, $M = N+1$ non sans avoir clairement décrit le modèle probabiliste envisagé.)

6. Déterminer numériquement l'entier N_0 au delà duquel la probabilité précédente est inférieure ou égale à 0,05. On justifiera son existence et indiquera sommairement le détail de sa détermination.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

DEVOIR N° 1 DE PROBABILITÉS
CORRECTION

L'objet de ce problème était d'étudier une application possible du *principe de réflexion* de Désiré André (XIX–XX-ième siècle) : il s'agit d'un principe combinatoire où on souhaite dénombrer un sous-ensemble C d'un ensemble Ω en transformant cet ensemble (la réflexion) de manière bijective afin d'obtenir un ensemble de structure combinatoire $\widetilde{C}$ plus simple à dénombrer. Une application classique de ce principe est la résolution du problème des scrutins : deux candidats ont reçu respectivement $m > n$ votes, quelle est la probabilité qu'en cours de dépouillement le premier candidat reste toujours en tête (*réponse :* $C_{m+n}^m \times (m - n + 1)/(m + 1)$).

Les figures ci-dessous représentent pour l'une un chemin quelconque de Ω, et pour l'autre un chemin qui s'annule avec le chemin réfléchi correspondant. Les pointillés représentent respectivement les chemins minimal et maximal de Ω : tout chemin de Ω reste compris entre ces deux-là.

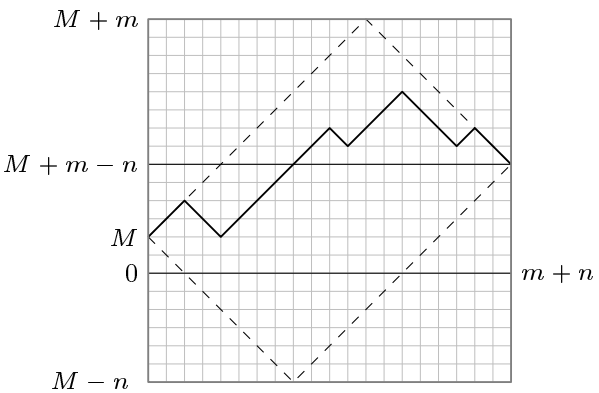


figure 1

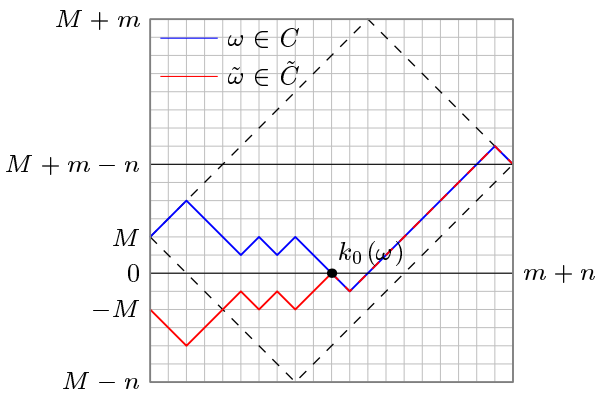


figure 2

1. L'ensemble Ω des chemins issus de M comportant m pas positifs et n pas négatifs est en bijection avec l'ensemble des parties à m éléments de $\{1, \dots, m + n\}$: cette bijection fait correspondre à un chemin les indices de ses pas positifs. Ils ont donc même cardinal : $\operatorname{Card} \Omega = C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$ (si on préfère considérer les indices des pas négatifs). Pour tout $\omega \in \Omega$, la position finale est la somme de la valeur de départ et du nombre de pas positifs diminué du nombre de pas négatifs, on a donc $\omega(m + n) = M + m - n$.

2. Soit C l'ensemble des chemins qui s'annulent. La condition nécessaire et suffisante pour que $C = \varnothing$ est $M > n$.

Remarquons tout d'abord que puisque les chemins débutent en l'entier $M > 0$ et que les pas se font par unités, $C = \varnothing$ si et seulement si tous les chemins restent strictement positifs.

La condition est suffisante : pour tout $\omega \in \Omega$, $k \in \{0, \dots, m + n\}$, on a $\omega(k) \geqslant M - n$; donc, si $M > n$, aucun chemin ne peut s'annuler.

La condition est nécessaire, montrons-le par contraposition : $M \leqslant n$ implique que $C \neq \varnothing$. Considérons le chemin ω issu de $M > 0$ commençant par n pas négatifs puis m pas positifs (c'est le chemin minimal) ; on a $\omega(n) = M - n$; si $M - n > 0$, alors $\omega \in C$ qui n'est donc pas vide.

3. Nous supposons $C \neq \varnothing$, ou de manière équivalente $M \leqslant n$ d'après la question précédente. Remarquons que pour tout $\omega \in \Omega$, et donc aussi dans C, $\omega(0) = M > 0$ et $\omega(m+n) = M + m - n > 0$, donc, si $\omega \in C$, alors $k_0(\omega) \in 1, \ldots, m+n-1$.

Notons par commodité $r : C \to \widetilde{C}$, $\omega \mapsto \widetilde{\omega}$. Commençons par montrer que r est bijective.

L'application r est clairement surjective puisque par définition $\widetilde{C}$ est l'image par r de C.

L'application r est de plus injective : si $\omega \in C$, $k_0(\omega)$ est aussi le premier instant d'annulation du chemin réfléchi $\widetilde{\omega}$; donc, si $\omega_1, \omega_2 \in C$ sont tels que $\widetilde{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_2 = \widetilde{\omega}$, alors $k_0(\omega_1) = k_0(\omega_2)$ qui est le premier instant d'annulation $k_0(\widetilde{\omega})$ de $\widetilde{\omega}$; comme ω_1 et ω_2 sont tous deux égaux à l'opposé de $\widetilde{\omega}$ sur $\{0, \ldots, k_0(\widetilde{\omega})\}$, et égaux à $\widetilde{\omega}$ sur $\{k_0(\widetilde{\omega}) + 1, \ldots, m+n\}$, on en déduit que ω_1 et ω_2 sont égaux sur $\{0, \ldots, m+n\}$ donc égaux. L'application r est bien injective.

Puisque $r : C \to \widetilde{C}$ est surjective et injective, elle est bijective.

Caractérisons à présent les chemins de $\widetilde{C}$.

Soit $\omega \in C$, et notons $\widetilde{M} = \widetilde{\omega}(0)$, $\widetilde{m}$ le nombre de pas positifs de $\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{n}$ le nombre de pas négatifs de $\widetilde{\omega}$. Puisque $k_0(\omega) \in 1, \ldots, m+n-1$, on a $\widetilde{\omega}(0) = -M = \widetilde{M}$, et $\widetilde{\omega}(m+n) = M + m - n = \widetilde{M} + \widetilde{m} + \widetilde{n}$. Enfin ω et $\widetilde{\omega}$ ont le même nombre de pas, donc $\widetilde{m} + \widetilde{n} = m + n$. Nous avons donc

$$\widetilde{M} = -M, \qquad M + m - n = \widetilde{M} + \widetilde{m} + \widetilde{n}, \qquad \widetilde{m} + \widetilde{n} = m + n,$$

et on obtient aisément que

$$\widetilde{M} = -M, \qquad \widetilde{m} = m + M, \qquad \widetilde{n} = n - M,$$

(les deux derniers entiers sont strictement positifs). Ces nombres ne dépendant pas de $\widetilde{\omega} \in \widetilde{C}$, on en déduit que $\widetilde{C}$ est inclus dans l'ensemble $\widetilde{\Omega}$ des chemins issus de $\widetilde{M} = -M$ comportant $\widetilde{m} = m + M$ pas positifs et $\widetilde{n} = n - M$ pas négatifs.

Pour caractériser $\widetilde{C}$, il faut prouver que $\widetilde{C} = \widetilde{\Omega}$.

Si $\widetilde{\omega} \in \widetilde{\Omega}$, comme $\widetilde{\omega}(0) < 0$ et $\widetilde{\omega}(m+n) > 0$, $\widetilde{\omega}$ s'annule à certains instants dans $\{1, \ldots, m+n-1\}$. Notons de la même manière $k_0(\widetilde{\omega})$ et $s(\widetilde{\omega})$ le chemin réfléchi correspondant :

$$k \in \{0, 1, \ldots, m+n\}, \qquad s(\widetilde{\omega})(k) = \begin{cases} -\widetilde{\omega}(k) & \text{si } k \leqslant k_0(\widetilde{\omega}) \\ \widetilde{\omega}(k) & \text{si } k > k_0(\widetilde{\omega}). \end{cases}$$

On constate que $s(\widetilde{\omega})$ est un chemin partant de M arrivant en $M + m - n$ et comportant $m+n$ pas. Il possède donc m pas positifs et n pas négatifs (ces nombres sont déterminés par le nombre total de pas et la différence entre les positions initiale et finale). Donc $s(\widetilde{\omega}) \in \Omega$, mais comme de plus $s(\widetilde{\omega})$ s'annule, $s(\widetilde{\omega}) \in C$. L'application $s : \widetilde{\Omega} \to C$ est injective (c'est le même raisonnement que celui fait pour l'injectivité de r). On a donc deux injections $\widetilde{\Omega} \xrightarrow{s} C \xrightarrow{r} \widetilde{C}$, ce qui montre, par composition, que $\widetilde{\Omega}$ s'injecte dans $\widetilde{C}$. Comme ce sont deux ensembles finis et que $\widetilde{C} \subset \widetilde{\Omega}$, ces ensembles sont donc égaux.

En conclusion, C et $\widetilde{C}$ sont en bijection et $\widetilde{C}$ est l'ensemble des chemins issus de $-M$ comportant $\widetilde{m} = m + M$ pas positifs et $\widetilde{n} = n - M$ pas négatifs.

4. De la même façon qu'à la question 1, on a :

$$\operatorname{Card} C = \operatorname{Card} \widetilde{C} = C_{\widetilde{m}+\widetilde{n}}^{\widetilde{n}} = C_{m+n}^{n-M} = C_{m+n}^{m+M} = \frac{(m+n)\,!}{(m+M)\,!\,(n-M)\,!}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(C) = \frac{(m+n)\,!/((m+M)\,!\,(n-M)\,!)}{(m+n)\,!/(m\,!\,n\,!)} = \frac{m\,!\,n\,!}{(m+M)\,!\,(n-M)\,!}.$$

5. Le nombre N étant le nombre initial de pièces de 5 € (de billets en fait…) dans le tiroir caisse, le problème de rendu de monnaie survient non pas quand il n'y a plus de pièces mais

quand il y en a -1. En décalant d'une unité, on part de $M = N + 1$ et le problème survient quand on atteint 0. L'ensemble Ω_N est donc celui des chemins issus de $M = N+1$ comportant $m = 60$ pas positifs et $n = 40$ pas négatifs. On le munit de sa tribu discrète et de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}_N$ — toutes les files constituées de ces 100 personnes possibles sont supposées équiprobables.

L'impossibilité de rendre la monnaie est alors l'événement C_N correspondant à celui défini dans la question 2, et on a

$$p_N = \mathbb{P}_N(C_N) = \frac{60\,!\;40\,!}{(61+N)\,!\;(39-N)\,!} = \frac{40 \times 39 \times \cdots \times (40-N)}{61 \times 62 \times \cdots \times (61+N)} = p_{N-1} \times \frac{40-N}{61+N}\,.$$

6. Lorsque $N \in \{0, 1, \ldots, 40\}$ on a $(40-N)/(61+N) \in [0,1]$, donc la suite (p_N) décroît ; pour $N \geqslant 40$, on a $p_N = 0$. Ainsi il existe un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_N \leqslant 0.05$ si et seulement si $N \geqslant N_0$. Calculons quelques termes :

N	0	1	2	3	4	5
p_N	0.6557	0.4125	0.2488	0.1438	0.0797	0.0436

Ainsi, $N_0 = 5$. On notera qu'avec assez peu de monnaie dans le tiroir-caisse, on a de bonnes chances de ne pas avoir de problème.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

CONTRÔLE DE PROBABILITÉS, 8 MARS 2006

Durée : 2 heures

Soit $0 < p \leqslant 1$. Nous définissons la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$, indéxée par les entiers strictement positifs, par

$$p_n = p(1-p)^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}.$$

1. À quelle condition la suite de nombres positifs $(p_n)_{n\geqslant 1}$ définit-elle une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ muni de sa tribu discrète ? Vérifier que cette condition est satisfaite.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $T : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire discrète de loi la loi géométrique de paramètre p :

$$\mathbb{P}\{T = n\} = \begin{cases} p(1-p)^{n-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Justifier, sans calcul, que l'espérance de T est bien définie. Calculer cette espérance.

3. Pour $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, calculer $\mathbb{P}\{T > n\}$. En déduire — justifications à l'appui —, pour m, $n \in \mathbb{N}$, la valeur de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}\{T > m + n \,|\, T > m\}$.

Une variable aléatoire $S : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$, discrète, est dite posséder la *propriété d'absence de mémoire* si, pour tous m, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\{S > m + n\} = \mathbb{P}\{S > m\} \times \mathbb{P}\{S > n\}.$$

4. Soit $S : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire discrète possédant cette propriété. Montrer qu'alors S a pour loi une loi géométrique dont on précisera le paramètre. Vérifier la réciproque.

Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite infinie d'événements indépendants de même probabilité $0 \leqslant q \leqslant 1$. On définit une application $R : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ par

$$R(\omega) = \inf\{n \geqslant 1 : \omega \in A_n\}, \qquad \omega \in \Omega,$$

où $\inf \varnothing = \infty$.

5.

Montrer que R est une variable aléatoire discrète, c'est-à-dire ici que pour tout $n \in N^* \cup \{\infty\}$, $\{R = n\}$ est un événement. Déterminer sa loi[1] en fonction de q.

1. D'une part on se servira du fait que si des événements sont indépendants, en prenant ou non leurs complémentaires, on obtient encore des événements indépendants, d'autre part on se servira de la propriété de continuité de $\mathbb{P}$ pour calculer $\mathbb{P}\{R < \infty\}$ et obtenir ainsi $\mathbb{P}\{R = \infty\}$ en distinguant en particulier le cas $q = 0$.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

CONTRÔLE DE PROBABILITÉS, 8 MARS 2006
CORRECTION

1. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ étant dénombrable et muni de sa tribu discrète, la suite de nombres positifs $(p_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ définit une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ si et seulement si la somme de ses termes vaut 1. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1} = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k = p\,\frac{1}{1-(1-p)} = p\,\frac{1}{p} = 1$$

— on voit apparaître la série géométrique de raison $x = 1-p \in [0,1[$ qui est convergente de somme $1/(1-x) = 1/p$. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ définit donc une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Puisque T est à valeurs positives, son espérance est bien définie dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On a

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbb{P}\{T=n\} = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}.$$

Avec $x = 1-p$ on voit apparaître la série dérivée de la série géométrique et puique $1-p$ est dans son disque de convergence

$$p\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = p\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n\bigg|_{x=1-p} = p\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=1-p} = p\,\frac{1}{(1-x)^2}\bigg|_{x=1-p} = \frac{1}{p}\,.$$

Donc, $\mathbb{E}[T] = 1/p$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\{T>n\} = \sum_{k>n}\mathbb{P}\{T=k\} = \sum_{k>n} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^n\sum_{\ell=0}^{\infty}(1-p)^\ell = p(1-p)^n\times\frac{1}{p} = (1-p)^n$$

toujours avec la série géométrique. Puisque pour $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\{T>m\} = (1-p)^m > 0$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}\{T > m+n \,|\, T>m\}$ est bien définie. De plus on a $\{T > m+n\} \subset \{T>m\}$ donc $\{T>m+n\}\cap\{T>m\} = \{T>m+n\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{T>m+n\,|\,T>m\} &= \frac{\mathbb{P}\big(\{T>m+n\}\cap\{T>m\}\big)}{\mathbb{P}\{T>m\}}\\ &= \frac{\mathbb{P}\{T>m+n\}}{\mathbb{P}\{T>m\}} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m} = (1-p)^n.\end{aligned}$$

4. Puisque S est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{P}\{s>0\} = 1$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\{S>n\} = (\mathbb{P}\{S>1\})^n.$$

Au rang $n=0$, c'est déjà vérifié. Supposons qu'au rang $n-1 \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{P}\{S>n-1\} = (\mathbb{P}\{S>1\})^{n-1}$, alors, par absence de mémoire, $\mathbb{P}\{S>n\} = \mathbb{P}\{S>n-1+1\} = \mathbb{P}\{S>n-1\}\times\mathbb{P}\{S>1\} = (\mathbb{P}\{S>1\})^{n-1}\times\mathbb{P}\{S>1\} = (\mathbb{P}\{S>1\})^n$: la propriété est alors vraie au rang n. Par récurrence, on a la l'identité annoncée.

En écrivant $p = 1-\mathbb{P}\{S>1\}$, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\{S=n\} = \mathbb{P}\{S>n-1\} - \mathbb{P}\{S>n\} = (1-p)^{n-1} - (1-p)^n = p(1-p)^{n-1}.$$

Puisque p est compris entre 0 et 1 et est différent de 0 (sinon toutes les probabilités ci-dessus seraient nulles, ce qui n'est pas possible puisque leur somme doit être égale à 1), la loi de S est donc la loi géométrique de paramètre $p = 1 - \mathbb{P}\{S > 1\}$.

La réciproque est immédiate avec la question 3 : On a pour tout m, $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\{S > m + n \,|\, S > m\} = \frac{\mathbb{P}\{S > m + n\}}{\mathbb{P}\{S > m\}} = (1-p)^n = \mathbb{P}\{S > n\}$$

et donc $\mathbb{P}\{S > m + n\} = \mathbb{P}\{S > m\} \times \mathbb{P}\{S > n\}$.

5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$. Il est clair que $R(\omega) = k$ si et seulement si $\omega \notin A_1, \ldots, \omega \notin A_{n-1}, \omega \in A_1$, ce qui s'écrit aussi $\omega \in A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$. Ainsi

$$\{R = n\} = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n\} = A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n$$

qui est une intersection finie d'événements et est aussi un événement. Enfin, il est clair que

$$\{R = \infty\} = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n^c \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$$

qui est une intersection dénombrable d'événements et est donc encore un événement. Donc R est bien une variable aléatoire discrète.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par indépendance

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{R = n\} = \mathbb{P}(A_1^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c \cap A_n) &= \mathbb{P}(A_1^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(A_n) \\ &= (1-q) \times \cdots \times (1-q) \times q = q(1-q)^{n-1}.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}\{R \leqslant n\} = \mathbb{P}\{R = 1\} + \cdots + \mathbb{P}\{R = n\} = 1 - (1-q)^n$ et comme la suite des événements $(\{R = n\})_{n \geqslant 1}$ croît vers $\{R < \infty\}$, on a

$$\mathbb{P}\{R < \infty\} = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{R \leqslant n\} = \lim_{n \to \infty} (1 - (1-q)^n) = 1 - \lim_{n \to \infty} (1-q)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } q > 0 \\ 0 & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

et ainsi

$$\mathbb{P}\{R = \infty\} = 1 - \mathbb{P}\{T < \infty\} = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ 1 & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

Ainsi lorsque $0 < q \leqslant 1$, la loi de R est la loi géométrique de paramètre q, et lorsque $q = 0$ la loi de R est la loi unité en ∞.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

DEVOIR N° 2 DE PROBABILITÉS

À remettre le 29 mars 2006

EXERCICE 1. — Le propos est ici de comparer la sécurité d'un passager suivant qu'il voyage dans un avion bi-moteur ou quadri-moteur. On fait les hypothèses suivantes :

a) les divers moteurs sont de qualités comparables, la probabilité de panne de chacun d'eux étant égale à q ($q \in [0,1]$) ;

b) les fonctionnements des moteurs d'un avion bi-moteur, respectivement d'un avion quadri-moteur, sont indépendants ;

c) un avion parvient à destination si et seulement si la moitié au moins de ses moteurs fonctionnent jusqu'au terme du parcours.

L'expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, A_1 et A_2 sont les événements pour lesquels le premier moteur, respectivement le second moteur, de l'avion bi-moteur tombe en panne, et B_1, B_2, B_3 et B_4 sont les événements correspondants pour le quadri-moteur.

(i) Déterminer en fonction de q la probabilité $p_1(q)$ qu'un avion bi-moteur parvienne jusqu'au terme de son parcours.

(ii) Déterminer en fonction de q la probabilité $p_2(q)$ qu'un avion quadri-moteur parvienne jusqu'au terme de son parcours.

(iii) En étudiant la fonction f définie par $f(q) = p_1(q) - p_2(q)$, $q \in [0,1]$, déterminer à quelle condition portant sur q il est strictement plus sûr de voyager dans un avion quadri-moteur que dans un avion bi-moteur. On tracera sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions p_1 et p_2 en y matérialisant la condition précédente.

EXERCICE 2. — Soient p et q deux réels dans $]0,1]$. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ on considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $Y+1$ est de loi géométrique de paramètre p et pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à $\{Y = n\}$, X est de loi binomiale de paramètres n et q, autrement dit

$$\mathbb{P}\{Y = n\} = \begin{cases} p(1-p)^n & \text{si } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\{X = k \,|\, Y = n\} = \begin{cases} C_n^k q^k (1-q)^{n-k} & \text{si } n \geqslant k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(i) Déterminer $\mathbb{P}\{X = k\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(ii) En déduire que la variable aléatoire $X+1$ est de loi géométrique d'un paramètre qu'on précisera.

(iii) En déduire, avec la simple connaissance (cours) de l'espérance d'une variable de loi géométrique et les justifications adéquates, l'espérance de X.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

DEVOIR N° 2 DE PROBABILITÉS
CORRECTION

Correction 1. — (i) Le bi-moteur ne parvient pas à destination si les 2 moteurs tombent en panne, *i.e.*, si l'événement $A_1 \cap A_2$ est réalisé. Par passage au complémentaire, la probabilité qu'il arrive à destination est

$$\begin{aligned} p_1(q) &= 1 - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = 1 - \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \qquad \text{par indépendance} \\ &= 1 - q^2. \end{aligned}$$

(ii) Le quadri-moteur ne parvient pas à destination si ou bien 3 ou bien 4 de ses moteurs tombent en panne, *i.e.*, si l'un des événements disjoints $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$, $B_1^c \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$, $B_1 \cap B_2^c \cap B_3 \cap B_4$, $B_1 \cap B_2 \cap B_3^c \cap B_4$, $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4^c$ est réalisé. Par passage au complémentaire et disjonction, la probabilité qu'il arrive à destination est

$$\begin{aligned} p_2(q) = 1 &- \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) - \mathbb{P}(B_1^c \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4) \\ &- \mathbb{P}(B_1 \cap B_2^c \cap B_3 \cap B_4) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3^c \cap B_4) - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4^c). \end{aligned}$$

Par indépendance des événements figurant dans ces probabilités, c'est égal à

$$\begin{aligned} &1 - \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(B_3)\,\mathbb{P}(B_4) - \mathbb{P}(B_1^c)\,\mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(B_3)\,\mathbb{P}(B_4) \\ &- \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2^c)\,\mathbb{P}(B_3)\,\mathbb{P}(B_4) - \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(B_3^c)\,\mathbb{P}(B_4) - \mathbb{P}(B_1)\,\mathbb{P}(B_2)\,\mathbb{P}(B_3)\,\mathbb{P}(B_4^c) \end{aligned}$$

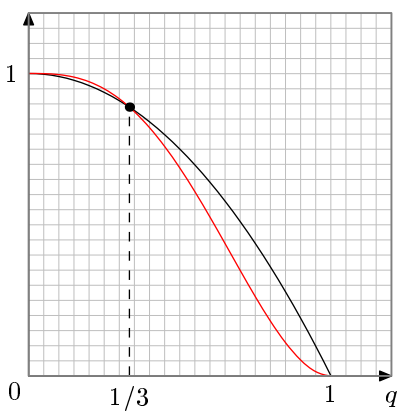
qui est encore égal à

$$1 - q^4 - 4\,q^3 \times (1-q) = 1 - 4\,q^3 + 3\,q^4 = p_2(q).$$

(iii) Soit $f(q) = p_1(q) - p_2(q) = -q^2 + 4\,q^3 - 3\,q^4 = -q^2(3\,q^2 - 4\,q + 1)$. Cette fonction est strictement négative, *i.e.*, il est plus sûr de voyager dans le quadri-moteur que dans le bi-moteur, si et seulement si $3\,q^2 - 4\,q + 1 > 0$. Le coefficient dominant de ce polynôme est positif et ses racines sont

$$q_1 = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{4 - \sqrt{4}}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{4 + \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{4 + \sqrt{4}}{6} = 1.$$

Il est par conséquent négatif dans $[1/3, 1]$ et strictement positif ailleurs. Il est donc plus sûr de voyager dans un quadri-moteur que dans un bi-moteur si et seulement si $q \in]0, 1/3[$.



Les deux courbes ci-contre représentent respectivement les fonctions p_1 (en noir) et p_2 (en rouge...). Aucune étude fine n'a réellement été demandée pour les tracer. On se sera contenté ici d'un tracé points à points.

On peut noter au passage les cas $q = 0$ et $q = 1$ pour lesquels les fonctions coïncident aussi. En $q = 0$, tous les avions arrivent toujours à destination. En $q = 1$, ils n'y arrivent jamais.

Enfin, notons que la condition obtenue est que chaque moteur ait moins d'une chance sur trois de tomber en panne pour préférer les quadri-moteur. Ceci conduit certains à ne voyager qu'en bi-moteurs...

Correction 2. — (i) Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\{Y = n\})_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X = k\} &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}\{X = k \,|\, Y = n\}\, \mathbb{P}\{Y = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}\{X = k \,|\, Y = n\}\, \mathbb{P}\{Y = n\} + \sum_{n\geqslant k} \mathbb{P}\{X = k \,|\, Y = n\}\, \mathbb{P}\{Y = n\} \\
&= \sum_{n=0}^{k-1} 0 \times p(1-p)^n + \sum_{n\geqslant k} C_n^k\, q^k (1-q)^{n-k} \times p(1-p)^n \\
&= \frac{p(q(1-p))^k}{k\,!} \sum_{n\geqslant k} \frac{n\,!}{(n-k)\,!} \big((1-q)(1-p)\big)^{n-k} \\
&= \frac{p(q(1-p))^k}{k\,!} \sum_{n\geqslant k} n \times \cdots \times (n-k+1) \big((1-q)(1-p)\big)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Dans cette expression apparaît la dérivée k-ième de la série géométrique évaluée en $x = (1-q)(1-p) \in [0,1[$. En effet, pour $x \in]-1,1[$, par dérivation d'une série entière dans son intervalle ouvert de convergence

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant k} n \times \cdots \times (n-k+1) x^{n-k} = \sum_{n\geqslant k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n &= \sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n \\
&= \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \sum_{n\geqslant 0} x^n = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \frac{1}{1-x} = \frac{k\,!}{(1-x)^{k+1}}\,.
\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X = k\} &= \frac{p(q(1-p))^k}{k\,!} \times \frac{k\,!}{(1-(1-q)(1-p))^{k+1}} = \frac{p(q(1-p))^k}{(1-(1-q)(1-p))^{k+1}} \\
&= \frac{p(q-pq))^k}{(p+q-pq)^{k+1}} = \frac{p}{p+q-pq} \times \left(\frac{q-pq}{p+q-pq}\right)^k \\
&= \frac{p}{p+q-pq} \times \left(1 - \frac{p}{p+q-pq}\right)^k
\end{aligned}$$

(ii) Posons

$$r = \frac{p}{p+q-pq} \in]0,1].$$

La variable aléatoire $X+1$ qui est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie

$$\mathbb{P}\{X+1 = n\} = \mathbb{P}\{X = n-1\} = \begin{cases} r(1-r)^{n-1} & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La loi de $X+1$ est donc la loi géométrique de paramètre r.

(iii) La variable aléatoire X est à valeurs positives, son espérance est donc bien définie. De plus $X = (X+1) - 1$ est une combinaison linéaire de deux variables intégrables $X+1$ et -1 d'espérances respectives $1/r$ et -1. Donc X est intégrable et on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X+1] + \mathbb{E}[-1] = 1/r - 1 = \frac{q-pq}{p}\,.$$

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

EXAMEN DE PROBABILITÉS

1ère session, 11 mai 2006
Durée : 3 heures

Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice est autorisé. Le soin de la rédaction, de l'explication et la justification des raisonnements, ainsi que des calculs numériques éventuels, sera pris en compte pour l'évaluation des copies. Les différentes questions sont indépendantes et d'importances inégales.

Première partie

On s'intéresse à la somme des faces montrées lors du lancer de 3 dés équilibrés. On note X_1, X_2 et X_3 les valeurs marquées par chacun des 3 dés et $Z = X_1 + X_2 + X_3$. (Le modèle probabiliste est donné par $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{1, \ldots, 6\}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité uniforme sur Ω, et $X_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$ est la i-ème coordonnée de $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.)

Question 1. Nous souhaitons déterminer la loi de Z. Pour ce faire :

- dresser un tableau indexé par les valeurs possibles x_1 et x_2 de X_1 et X_2 dans lequel figure les sommes de ces valeurs possibles ;
- en déduire sous la forme d'un tableau le nombre de possibilités pour x_1 et x_2 (36 en tout) correspondant aux différentes valeurs possibles y de $Y = X_1 + X_2$;
- dresser un tableau indexé par les valeurs possibles y et x_3 de $Y = X_1 + X_2$ et X_3 dans lequel figure les sommes de ces valeurs possibles (on pourra adjoindre aux valeurs possibles de y le nombre de possibilités correspondantes pour x_1 et x_2 afin de préparer le point suivant) ;
- en déduire sous la forme d'un tableau le nombre de possibilités pour x_1, x_2 et x_3 (216 en tout) correspondant aux différentes valeurs possibles z de $Z = Y + X_3$;
- représenter sous la forme d'un diagramme en bâtons la loi de la variable aléatoire Z ; on adjoindra à ce diagramme une courbe en pointillés soulignant sa forme.

Question 2. Déterminer avec tous les détails et justifications nécessaires l'espérance de Z.

Deuxième partie

Nous rappelons que la fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{N}$ est définie comme la somme de la série entière (en la variable s)

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \, \mathbb{P}\{X = k\}$$

dont le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1 ; que cette fonction génératrice G_X caractérise la loi de X ; que la somme de deux variables aléatoires entières est une variable aléatoire entière ; et que la fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires entières indépendantes est le produit de leurs fonctions génératrices.

Question 3. Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. En déduire la loi d'une somme $Z = X + Y$ de deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$.

Question 4. Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ. En déduire la loi d'une somme $Z = X + Y$ de deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

Troisième partie

Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle de loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ. Nous rappelons qu'alors la variable aléatoire $(X-\mu)/\sigma$ a pour loi la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ dont la fonction de répartition est notée Φ. À toutes fins utiles, nous donnons quelques valeurs approchées de Φ et de Φ^{-1} sa fonction inverse :

z	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50
$\Phi(z)$	0.5000	0.5987	0.6915	0.7734	0.8413	0.8944	0.9332	0.9599	0.9772	0.9878	0.9938

α	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	1
$\Phi^{-1}(\alpha)$	0.0000	0.1257	0.2533	0.3853	0.5244	0.6745	0.8416	1.0364	1.2816	1.6449	$+\infty$

Quelques croquis seront appréciés mais ne se substitueront pas à des justifications adéquates.

Question 5. Supposons que $\mu = 10$ et $\sigma = 4$. Calculer $\mathbb{P}\{X \leqslant 12\}$. En déduire $\mathbb{P}\{X > 12\}$, $\mathbb{P}\{X < 8\}$ et $\mathbb{P}\{8 \leqslant X \leqslant 12\}$.

Question 6. Si $\mu = 10$ est fixé mais pas $\sigma > 0$, déterminer la valeur maximale σ_0 de σ en dessous de laquelle $\mathbb{P}\{8 \leqslant X \leqslant 12\} \geqslant 0{,}8$ (on raisonnera par équivalences entre inégalités).

Quatrième partie

Soient X, $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to [0,1]$ deux variables aléatoires réelles, indépendantes, toutes deux de loi uniforme sur $[0,1]$, et la variable aléatoire $Z = Y - X$. Nous rappelons que le couple (X,Y) est alors une variable aléatoire uniformément répartie dans le carré $[0,1]^2$.

Question 7. Déterminer la fonction de répartition $F_Z : \mathbb{R} \to [0,1]$ de la loi de Z en s'appuyant sur des représentations graphiques, la représenter graphiquement. Justifier le fait que la loi de Z admette une densité. Déterminer une telle densité, la représenter graphiquement.

Question 8. Déterminer avec tous les détails et justifications nécessaires l'espérance et la variance de Z.

Cinquième partie

On considère un ensemble Ω infini et non dénombrable (on peut penser à $\mathbb{R}$ pour se faire une idée, mais une idée seulement). On définit $\mathcal{A}$ comme étant l'ensemble des parties de Ω qui sont au plus dénombrables ou de complémentaire au plus dénombrable. On définit $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ par $\mathbb{P}(A) = 0$ si $A \in \mathcal{A}$ est au plus dénombrable, et $\mathbb{P}(A) = 1$ si $A \in \mathcal{A}$ est de complémentaire au plus dénombrable (dans ce cas A n'est pas au plus dénombrable).

Question 9. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω. Montrer, ensuite, que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. (On pourra ne pas s'attarder sur cette question.)

Question 10. Montrer que toute variable aléatoire réelle $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ est presque sûrement constante (*indication :* considérer sa fonction de répartition).

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

EXAMEN DE PROBABILITÉS, CORRECTION

1ère session, 11 mai 2006

Première partie

Question 1.

- Tableau de $y = x_1 + x_2$ en fonction de x_1 et x_2 :

x_2 \ x_1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

- Tableau de $y = x_1 + x_2$ et nombre de possibilités pour x_1 et x_2 :

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
nombre de possibilités	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

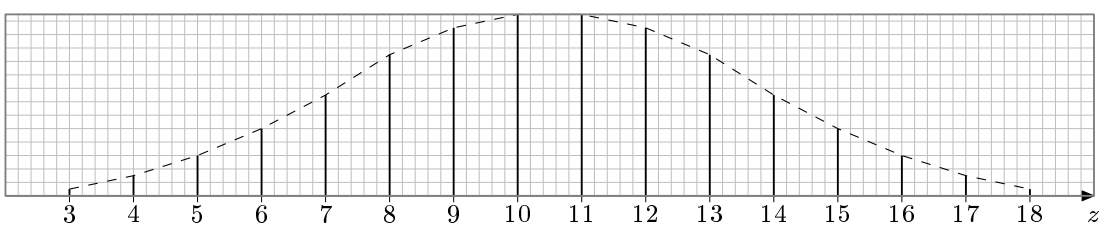
- Tableau de $z = y + x_3$ en fonction de y et x_2 :

x_3 \ y	2_1	3_2	4_3	5_4	6_5	7_6	8_5	9_4	10_3	11_2	12_1
1	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
3	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
5	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

- Tableau de $z = x_1 + x_2 + x_3$ et nombre de possibilités pour x_1, x_2 et x_3 :

z	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
nombre de possibilités	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

- Diagramme en bâtons de la loi de Z :



Question 2. La variable Z est la somme de trois variables intégrables, et est donc intégrable, chacune d'espérance

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3{,}5\,;$$

on a ainsi par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = 3 \times 3{,}5 = 10{,}5.$$

Deuxième partie

Question 3. Soit X de loi $\mathcal{B}(n,p)$. Alors

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} s^k C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (sp)^k (1-p)^{n-k} = (sp+1-p)^n,$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ puisque G_X est ici un polynôme.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(m,p)$, $Z = X+Y$ a, par indépendance, pour fonction génératrice le produit des fonctions génératrices de X et de Y, et ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$G_Z(s) = G_X(s) \times G_Y(s) = (sp+1-p)^n \times (sp+1-p)^m = (sp+1-p)^{n+m}$$

qui définit la fonction génératrice de la loi $\mathcal{B}(n+m,p)$. Ainsi Z est de loi $\mathcal{B}(n+m,p)$.

Question 4. Soit X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Alors,

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k\,!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\lambda)^k}{k\,!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{s\lambda} \times \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}$$

pour tout $s \in \mathbb{R}$ puisque la série entière est de rayon de convergence infini.

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, $Z = X+Y$ a, par indépendance, pour fonction génératrice le produit des fonctions génératrices de X et de Y, et ainsi, pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$G_Z(s) = G_X(s) \times G_Y(s) = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)} \times \mathrm{e}^{\mu(s-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(s-1)}$$

qui définit la fonction génératrice de la loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. Ainsi Z est de loi $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

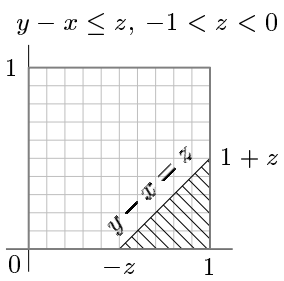
Troisième partie

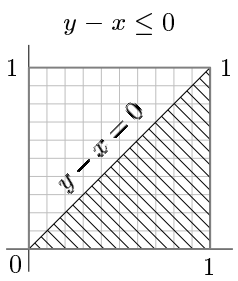
Question 5. On a directement $\mathbb{P}\{X \leqslant 12\} = \mathbb{P}\{(X-\mu)/\sigma \leqslant (12-\mu)/\sigma\} = \Phi((12-\mu)/\sigma) = \Phi((12-10)/4) = \Phi(0{,}5) \approx 0{,}6915$. Par passage au complémentaire $\mathbb{P}\{X > 12\} = 1 - \mathbb{P}\{X \leqslant 12\} \approx 0{,}3085$. Par symétrie de la loi de X autour de $\mu = 10$, $\mathbb{P}\{X < 8\} \approx 0{,}3085$. Finalement, on a, par exemple, $\mathbb{P}\{8 \leqslant X \leqslant 12\} = 1 - \mathbb{P}\{X > 12\} - \mathbb{P}\{X < 8\} \approx 0{,}383$.

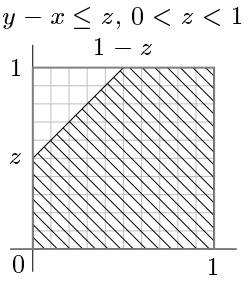
Question 6. Tout d'abord, nous avons $\mathbb{P}\{8 \leqslant X \leqslant 12\} = \mathbb{P}\{-2/\sigma \leqslant (X-10)/\sigma \leqslant 2/\sigma\}$ qui, puisque $(X-10)/\sigma$ est de loi $\mathcal{N}(0,1)$ est éagal à $2\phi(2/\sigma) - 1$. La condition est donc $2\phi(2/\sigma) - 1 \geqslant 0{,}8 \iff \phi(2/\sigma) \geqslant 1{,}8/2 = 0{,}9 \iff 2/\sigma \geqslant \Phi^{-1}(0{,}9) \iff \sigma \leqslant 2/\Phi^{-1}(0{,}9) \approx 2/1{,}2816 \approx 1{,}5606 \approx 1{,}56$. Ainsi $\sigma_0 \approx 1{,}56$.

Quatrième partie

Question 7. On étudie la loi de $Z = Y - X$ qui est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[-1, 1]$. En fonction de $z \in [-1, 1]$, l'évévement $\{Z \leqslant z\}$ équivaut à ce que le couple (X, Y) soit dans la zone hachurée correspondante :

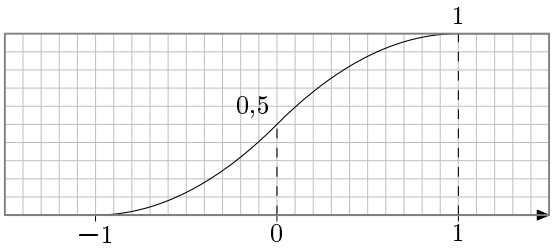






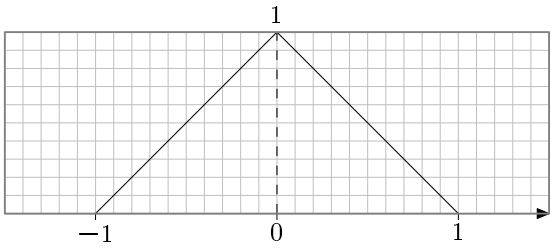
Puisque (X, Y) est uniformément réparti dans $[0, 1]^2$, $F_Z(z) = \mathbb{P}\{Z \leqslant z\}$ est égale à l'aire de la région hachurée correspondante. On a ainsi

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leqslant -1 \\ (1+z)^2/2 & \text{si } -1 \leqslant z \leqslant 0 \\ 1 - (1-z)^2/2 & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } z \geqslant 1. \end{cases}$$



Puisque la fonction de répartition de la loi de Z est continue de dérivée continue (par morceaux), elle est une primitive de sa dérivée. Donc la loi de Z admet une densité, densité qu'on peut calculer par dérivation de F_Z :

$$p_Z(z) = \mathbb{1}_{[-1,0[}(z)\,(z+1)z + \mathbb{1}_{[0,1]}(z)\,(1-z).$$



Question 8. Les variables X et Y étant uniformément réparties sur $[0, 1]$, elles sont de carré intégrable et on a

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = 1/2, \qquad \mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = 1/3,$$

et ainsi $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$. Par linéarité de l'espérance, on a alors

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[Y - X] = \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X] = 0\,;$$

et puisque $-X$ et Y sont indépendantes ($-X$ est fonction de X qui est indépendante de Y), on a

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}\big(Y + (-X)\big) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}\big((-X)\big) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(X) = 1/6.$$

Cinquième partie

Question 9. Vérifions que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

L'ensemble vide $\varnothing$ appartient à $\mathcal{A}$ car il est fini.

Si $A \in \mathcal{A}$ alors, ou bien A est au plus dénombrable et donc A^c est de complémentaire au plus dénombrable et ainsi appartient à $\mathcal{A}$, ou bien A est de complémentaire au plus dénombrable et donc A^c est au plus dénombrable et ainsi appartient à $\mathcal{A}$. Dans les deux cas, $A^c \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire.

Soit $(A_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Si tous les A_n sont au plus dénombrables, leur réunion l'est aussi et appartient donc à $\mathcal{A}$. Si, en revanche, il existe un indice N tel que A_N n'est pas au plus dénombrable, alors A_N est de complémentaire au plus dénombrable et on a

$$\left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n^c \subset A_N^c,$$

ce qui montre que $\bigcup_n A_n$ est de complémentaire au plus dénombrable et est donc dans $\mathcal{A}$. Dans tous les cas $\bigcup_n A_n$ est dans $\mathcal{A}$. Ce qui montre que $\mathcal{A}$ est stable par réunion au plus dénombrable.

Vérifions que $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Puisque Ω est de complémentaire au plus dénombrable, on a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Considérons (A_n) une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$. Si tous les A_n sont au plus dénombrables alors $\bigcup_n A_n$ l'est aussi et on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = 0 = \sum_n 0 = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

Si en revanche il existe un N tel que A_N n'est pas au plus dénombrable, par disjonction, il est le seul. En effet, soit $M \neq N$, alors $A_N \cap A_M = \varnothing$ donc $A_N^c \cup A_M^c = \Omega$, ce qui implique, puisque A_N^c est au plus dénombrable que A_M^c ne l'est pas. Comme $\cup_n A_n$ est de complémentaire inclus dans A_N^c au plus dénombrable, on a ainsi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = 1 = \mathbb{P}(A_N) = \mathbb{P}(A_N) + \sum_{n\neq N} 0 = \mathbb{P}(A_N) + \sum_{n\neq N} \mathbb{P}(A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

Ce qui montre que $\mathbb{P}$ est dénombrablement additive.

Question 10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{X \leqslant x\} \in \mathcal{A}$ et est donc de probabilité égale à 0 ou 1. Puisque la fonction de répartition de la loi de X est croissante et tend vers 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, on en déduit que c'est une fonction palier. Son unique saut a lieu en un certain $x_0 \in \mathbb{R}$ et est d'amplitude 1. Comme $1 = F_X(x_0) - F_X(x_0-) = \mathbb{P}\{X = x_0\}$, on en déduit que $X = x_0$ presque sûrement : X est presque sûrement constante.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

EXAMEN DE PROBABILITÉS

2ème session, 14 juin 2006
Durée : 3 heures

Tout document est interdit. L'usage d'une calculatrice est autorisé. Le soin de la rédaction, de l'explication et la justification des raisonnements, ainsi que des calculs numériques éventuels, sera pris en compte pour l'évaluation des copies. Les différentes parties sont indépendantes.

Première partie

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire positive de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire dont la loi admet pour densité

$$p_X : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

Question 1. Justifier le fait que p_X est une densité de mesure de probabilité. Calculer l'espérance de X.

Question 2. On définit $Y : \Omega \to \mathbb{N}^*$ par

$$\omega \in \Omega, \qquad Y(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor + 1$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la variable aléatoire Y a pour loi une loi géométrique dont on précisera le paramètre en fonction de λ.

Deuxième partie

Soient X, Y, $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \{0, 1\}$ trois variables aléatoires indépendantes, toutes de loi de Bernoulli de même paramètre $p \in [0, 1]$ (pour X, par exemple, $\mathbb{P}\{X = 1\} = p = 1 - \mathbb{P}\{X = 0\}$). On considère la matrice aléatoire

$$M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{pmatrix}$$

et les variables aléatoires $T = \operatorname{tr} M$, $D = \det M$, qui sont respectivement la trace et le déterminant de M.

Question 3. Déterminer les valeurs possibles de T, sa loi, son espérance et sa variance.

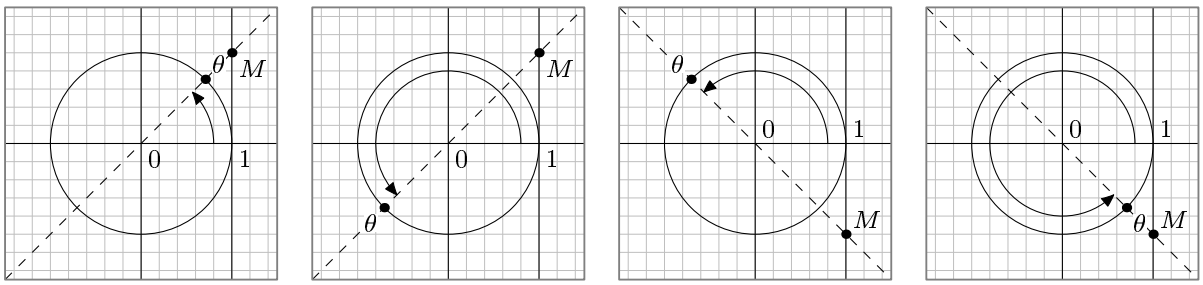
Question 4. Déterminer les valeurs possibles de D, sa loi, son espérance et sa variance.

Question 5. Les variables T et D sont-elles indépendantes ?

suite page suivante...

Troisième partie

Question 6. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Soit x l'ordonnée du point M d'intersection de la droite issue de l'origine, d'angle θ, et de la droite verticale d'abscisse 1. Pour quelles valeurs de θ, x est-il bien défini ? Exprimer, pour celles-ci, x en fonction de θ.



Question 7. Pour $x \in \mathbb{R}$, quelles sont les valeurs de $\theta \in [0, 2\pi[$ telles que la droite issue de l'origine, d'angle θ intercepte la droite verticale d'abscisse 1 au point $M = (1, x)$?

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\Theta : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to [0, 2\pi[$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$. On définit X en fonction de Θ comme précédemment.

Question 8. Quel événement correspond à la non définition de X ? Pourquoi peut-on le négliger ?

Question 9. Déterminer la fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto F_X(x) = \mathbb{P}\{X \leqslant x\} \end{aligned}$$

de la loi de X. En déduire que la loi de X admet une densité qu'on précisera.

Question 10. La variable X admet-elle une espérance ? On justifiera sa réponse.

Quatrième partie

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes de même loi une loi normale de moyenne $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma > 0$.

Question 11. Quelles sont la moyenne et la variance de la variable $S_n = X_1 + \cdots + X_n$? Quelle est sa loi ?

Question 12. Quelles sont la moyenne et la variance de la variable $\bar{X}_n = S_n/n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$? Quelle est sa loi ?

Question 13. Soit $a > 0$. Déterminer, en fonction de a (et de $\Phi^{-1}(0{,}975)$), la condition sur n pour que

$$\mathbb{P}\{\bar{X}_n \in [\mu - a \times \sigma, \mu + a \times \sigma]\} \geqslant 0{,}95.$$

Question 14. La note à un examen de Probabilités d'un étudiant est modélisée par une loi normale de moyenne dépendant de l'étudiant en question (sa moyenne « idéale ») et d'écart-type $\sigma = 1$. Quel nombre minimum d'examens doit-on faire passer à cet étudiant si on souhaite avoir 95 % de chances que sa moyenne obtenue ne diffère pas de plus d'un point de sa moyenne « idéale » ? On donne $\Phi^{-1}(0{,}975) \approx 1{,}96$.

Université de Poitiers
Département de Mathématiques

Licence de Mathématiques
6L18–Probabilités, année 2005–06

EXAMEN DE PROBABILITÉS, CORRECTION

Première partie

Question 1. La fonction p_X est positive, continue par morceaux, donc son intégrale (de Riemann par exemple) sur $\mathbb{R}$ a un sens et on a

$$\int_{\mathbb{R}} p_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}[-\mathrm{e}^{\lambda x}]_0^R = \lim_{R\to\infty} 1-\mathrm{e}^{-\lambda R} = 1.$$

Donc p_X est une densité de mesure de probabilité. La variable X étant positive, son espérance est définie et on a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x\,p_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \lim_{R\to\infty}\int_0^R x\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x,$$

qui par intégration par parties vaut

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}[-x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}]_0^R + \int_0^R x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{R\to\infty} -R\,\mathrm{e}^{-\lambda R} + [-\mathrm{e}^{-\lambda x}/\lambda]_0^R \\ &= \lim_{R\to\infty} -R\,\mathrm{e}^{-\lambda R} + 1/\lambda - \mathrm{e}^{-\lambda R}/\lambda = 0 + 1/\lambda - 0 = 1/\lambda.\end{aligned}$$

On a donc $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$.

Question 2. Rappelons que la partie entière d'un nombre réel est le plus grand entier minorant ce nombre réel. Ainsi la partie entière d'un nombre positif au sens large est un entier positif au sens large. De sorte que $Y = \lfloor X\rfloor + 1$ est à valeurs dans l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a égalité des événements $\{Y = k\}$ et $\{X \in [k-1, k[\}$, ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y=k\} = \mathbb{P}\{X\in[k-1,k[\} &= \int_{k-1}^k \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = [-\mathrm{e}^{-\lambda x}]_{k-1}^k \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)} - \mathrm{e}^{-\lambda k} = \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)}(1-\mathrm{e}^{-\lambda}) = (1-p)^{k-1}p\end{aligned}$$

où on aura posé

$$p = 1-\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

Par conséquent Y est de loi la loi géométrique de paramètre $p = 1-\mathrm{e}^{-\lambda}$.

Deuxième partie

Question 3. On a $T = X + Z$ qui est donc *a priori* à valeurs dans $\{0,1,2\}$ puisque X et Z sont à valeurs dans $\{0,1\}$. En se servant des hypothèses, on peut affirmer que T est de loi binomiale de paramètre 2 et p puisque X et Z sont indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p. Donc

$$\mathbb{P}\{T=0\} = (1-p)^2, \qquad \mathbb{P}\{T=1\} = 2p(1-p), \qquad \mathbb{P}\{T=2\} = p^2.$$

(Un calcul direct le montre aussi très facilement.) Puisque X et Z sont intégrables d'espérance p, on a par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X+Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Z] = p + p = 2p$. Puisque de

plus X et Z sont indépendantes chacune de variance $p(1-p)$, on a $\mathrm{Var}(T) = \mathrm{Var}(X+Z) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Z) = 2p(1-p)$. Ce sont là des résultats classiques.

Question 4. On a $D = XZ - Y^2 = XZ - Y$ ($Y^2 = Y$ puisque Y est à valeurs dans $\{0,1\}$) qui est donc *a priori* à valeurs dans $\{-1,0,1\}$ puisque X, Z et Y sont à valeurs dans $\{0,1\}$. On a, — sans omettre de détails —,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{D=-1\} &= \mathbb{P}\{X=0, Z=0, Y=1\} + \mathbb{P}\{X=1, Z=0, Y=1\} + \mathbb{P}\{X=0, Z=1, Y=1\} \\
&= \mathbb{P}\{X=0\}\,\mathbb{P}\{Z=0\}\,\mathbb{P}\{Y=1\} \\
&\quad + \mathbb{P}\{X=1\}\,\mathbb{P}\{Z=0\}\,\mathbb{P}\{Y=1\} + \mathbb{P}\{X=0\}\,\mathbb{P}\{Z=1\}\,\mathbb{P}\{Y=1\} \\
&= (1-p)^2 p + (1-p)p^2 + (1-p)p^2 = (1-p)p(1+p) = (1-p^2)p \\
&= p - p^3, \\
\mathbb{P}\{D=0\} &= \mathbb{P}\{X=0, Z=0, Y=0\} + \mathbb{P}\{X=0, Z=1, Y=0\} \\
&\quad + \mathbb{P}\{X=1, Z=0, Y=0\} + \mathbb{P}\{X=1, Z=1, Y=1\} \\
&= \mathbb{P}\{X=0\}\,\mathbb{P}\{Z=0\}\,\mathbb{P}\{Y=0\} + \mathbb{P}\{X=0\}\,\mathbb{P}\{Z=1\}\,\mathbb{P}\{Y=0\} \\
&\quad + \mathbb{P}\{X=1\}\,\mathbb{P}\{Z=0\}\,\mathbb{P}\{Y=0\} + \mathbb{P}\{X=1\}\,\mathbb{P}\{Z=1\}\,\mathbb{P}\{Y=1\} \\
&= (1-p)^3 + 2(1-p)^2 p + p^3 = 1 - 3p + 3p^2 - p^3 + 2p - 4p^2 + 2p^3 + p^3 \\
&= 1 - p - p^2 + 2p^3, \\
\mathbb{P}\{D=1\} &= \mathbb{P}\{X=1, Z=1, Y=0\} \\
&= \mathbb{P}\{X=1\}\,\mathbb{P}\{Z=1\}\,\mathbb{P}\{Y=0\} \\
&= p^2(1-p) \\
&= p^2 - p^3,
\end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier — à toutes fins utiles — que la somme de ces probabilités vaut 1 : $(p-p^3) + (1-p-p^2+2p^3) + (p^2-p^3) = 1$. On a

$$\mathbb{E}[D] = -1 \times \mathbb{P}\{D=-1\} + 0 \times \mathbb{P}\{D=0\} + 1 \times \mathbb{P}\{D=1\} = -p + p^3 + p^2 - p^3 = p^2 - p,$$

puis

$$\mathbb{E}[D^2] = (-1)^2 \times \mathbb{P}\{D=-1\} + 0^2 \times \mathbb{P}\{D=0\} + 1^2 \times \mathbb{P}\{D=1\} = p - p^3 + p^2 - p^3 = p + p^2 - 2p^3,$$

et finalement

$$\mathrm{Var}(D) = \mathbb{E}[D^2] - \mathbb{E}[D]^2 = p + p^2 - 2p^3 - (p^4 - 2p^3 + p^2) = p - p^4.$$

On pourrait aussi procéder comme suit : $\mathbb{E}[D] = \mathbb{E}[XZ - Y] = \mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[Y] = pp - p = p^2 - p$ en utilisant d'abord la linéarité de l'espérance puis l'indépendance de X et de Z ; $\mathrm{Var}(D) = \mathrm{Var}(XZ - Y) = \mathrm{Var}(XZ) + \mathrm{Var}(Y)$ par indépendance de XZ et de Y, puis XZ est de loi de Bernoulli de paramètre p^2 sa variance vaut donc $p^2(1-p^2)$ tandis que celle de Y vaut $p(1-p)$, pour obtenir ainsi, $\mathrm{Var}(D) = p^2 - p^4 + p - p^2 = p - p^4$.

Question 5. Regardons la probabilité de l'événement $\{T=0, D=1\}$. On a

$$\mathbb{P}\{T=0, D=1\} = \mathbb{P}\{((X=0, Z=0) \cap (X=1, Z=1, Y=0)\} = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.$$

Or

$$\mathbb{P}\{T=0\} \times \mathbb{P}\{D=1\} = (1-p)^2 \times (p - p^3)$$

qui est nul si et seulement si $p \in \{0,1\}$. Donc lorsque $p \in]0,1[$, T et D ne sont pas des variables indépendantes. Si $p \in \{0,1\}$, les variables T et D sont, tout comme X, Z et Y, presque sûrement constantes ; elles sont dans ce cas indépendantes.

Troisième partie

Question 6. La droite d'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ coupe la droite verticale d'abscisse 1 si et seulement si cette droite n'est pas vertivale, autrement dit si $\theta \neq \pi/2$ et $\theta \neq 3\pi/2$. Lorsque ceci est satisfait on a $x = \tan\theta$.

Question 7. Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche les solutions de $\theta \in [0, 2\pi[$, et $\tan\theta = x$. En précisant que la fonction inverse de la tangente est arctan : $\mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$, les solutions cherchées sont

$$\text{si } x \geqslant 0, \qquad \theta = \arctan x \qquad \text{et} \qquad \arctan x + \pi$$

et

$$\text{si } x < 0, \qquad \theta = \arctan x + \pi \qquad \text{et} \qquad \arctan x + 2\pi.$$

Question 8. L'événement correspondant à la non définition de X est $\{\Theta \in \{\pi/2, 3\pi/2\}\}$ qui, puisque Θ est de loi uniforme sur $[0, 2\pi[$, est de probabilité nulle. On peut donc le négliger.

Question 9. La loi de X est clairement symétrique par rapport à 0. On peut donc ne s'intéresser qu'aux probabilités $\mathbb{P}\{0 < X \leqslant x\}$ avec $x > 0$. Or $\{0 < X \leqslant x\} = \{\Theta \in]0, \arctan x]\} \cup \{\Theta \in]\pi, \arctan x + \pi]\}$ qui est de probabilité $(\arctan x - 0)/2\pi + (\arctan x + \pi - \pi)/2\pi = \arctan x/\pi$. Comme $\mathbb{P}\{X \leqslant 0\} = 1/2$ par symétrie, on a pour tout $x \geqslant 0$,

$$F_X(x) = 1/2 + \arctan x/\pi,$$

identité qui est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par symétrie de la loi de X autour de 0.

La fonction de répartition de la loi de X étant continue, et dérivable, la loi de X admet une densité p_X qu'on peut obtenir par dérivation de la fonction de répartition. On obtient ainsi

$$p_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1/\pi}{1+x^2} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Question 10. La variable X est à valeurs réelles. Si X^+ désigne sa partie positive et X^- sa partie négative, on a par symétrie et en utilisant la densité précédemment déterminée

$$\mathbb{E}[X^+] = \mathbb{E}[X^-] = \int_0^\infty x p_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x/\pi}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \infty,$$

ce qui montre que l'espérance de X n'est pas définie. La variable X n'admet donc pas d'espérance.

Quatrième partie

Question 11. Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant intégrables d'espérance μ, on a par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n\mu.$$

Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes de variance σ^2, on a

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n\sigma^2.$$

Puisque $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et toutes de lois normales, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ est aussi de loi normale et on vient de voir que sa moyenne est $n\mu$ et sa variance est $n\sigma^2$ (donc son écart-type est égal à $\sqrt{n}\,\sigma$).

Question 12. Puisque $\bar{X}_n = S_n/n$, on a

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \mathbb{E}[S_n/n] = \mathbb{E}[S_n]/n = \mu, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \mathrm{Var}(S_n/n) = \mathrm{Var}(S_n)/n^2 = \sigma^2/n.$$

Puisque S_n a pour loi une loi normale, il en est de même de $\bar{X}_n = S_n/n$ et on vient de déterminer les paramètres de cette loi (son écart-type est $\sigma/\sqrt{n}$).

Question 13. Rappelons que $(\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n])/\sqrt{\mathrm{Var}(\bar{X}_n)} = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$ a pour loi la loi normale de moyenne nulle et d'écart-type 1. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\bar{X}_n \in [\mu - a \times \sigma, \mu + a \times \sigma]\} \geqslant 0{,}95 \\
\iff\ &\mathbb{P}\{\bar{X}_n - \mu \in [-a \times \sigma, a \times \sigma]\} \geqslant 0{,}95 \\
\iff\ &\mathbb{P}\{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma \in [-a \times \sqrt{n}, a \times \sqrt{n}]\} \geqslant 0{,}95 \\
\iff\ &2\Phi(a \times \sqrt{n}) - 1 \geqslant 0{,}95 \\
\iff\ &\Phi(a \times \sqrt{n}) \geqslant 0{,}975 \\
\iff\ &a \times \sqrt{n} \geqslant \Phi^{-1}(0{,}975) \\
\iff\ &\sqrt{n} \geqslant \Phi^{-1}(0{,}975)/a \\
\iff\ &n \geqslant \Phi^{-1}(0{,}975)^2/a^2,
\end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Question 14. La dernière question n'est qu'une application numérique de la précédente avec $\sigma = a = 1$. On trouve donc

$$n \geqslant \Phi^{-1}(0{,}975)^2 \approx (1{,}96)^2 = 3{,}8416,$$

et donc on doit avoir $n \geqslant 4$ pour avoir 95 % de chances que la moyenne obtenue par l'étudiant ne diffère de pas plus d'un point de sa moyenne « idéale ».