Corrigé Travaux dirigés iL01 : Mathématiques Discrètes, Feuille 6 vendredi 4 novembre 2005

1. Calculer les 6 premiers termes des séries formelles ci-dessous, donner une équation différentielle vérifiée par la série formelle, et une relation de récurrence pour ses coefficients quand la série est écrite sous la forme d'une série génératrice exponentielle $S = \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n \frac{X^n}{n!}$.

a. $\exp(X + \frac{X^2}{2!})$.

$\surd$ $1 + X + 2\frac{X^2}{2!} + 4\frac{X^3}{3!} + 10\frac{X^4}{4!} + 26\frac{X^5}{5!}$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S) = (1+X)S$; $c_{n+1} = c_n + nc_{n-1}$.

b. $\exp(X + X^2)$

$\surd$ $1 + 2X + 3\frac{X^2}{2!} + 7\frac{X^3}{3!} + 25\frac{X^4}{4!} + 81\frac{X^5}{5!}$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S) = (1+2X)S$; $c_{n+1} = c_n + 2nc_{n-1}$.

c. $\exp(\exp(X) - 1)$.

$\surd$ $1 + X + 2\frac{X^2}{2!} + 5\frac{X^3}{3!} + 15\frac{X^4}{4!} + 52\frac{X^5}{5!}$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S) = S\exp(X)$; $c_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} c_i$.

d. $\log(\frac{1}{1-X})$.

$\surd$ $X + 1\frac{X^2}{2!} + 2\frac{X^3}{3!} + 6\frac{X^4}{4!} + 24\frac{X^5}{5!}$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S) = \frac{1}{1-X}$; $c_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i! c_{n+1-i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!} c_i$. *Mais* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(\frac{1}{1-X})/\frac{1}{1-X} = \frac{1}{1-X}$ *donne également tout de suite* $c_{n+1} = n!$ *pour* $n \in \mathbf{N}$.

e. $\log(1 - X - X^2)$.

$\surd$ $-X - 3\frac{X^2}{2!} - 8\frac{X^3}{3!} - 42\frac{X^4}{4!} - 432\frac{X^5}{5!}$; $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S) = -\frac{1+2X}{1-X-X^2}$; $c_{n+1} = nc_n + n(n-1)c_{n-1}$ *pour* $n \geq 2$ *(pour* $n = 1$ *on a* $c_2 = -2 + c_1$*). Mais de* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S) = -\frac{1+2X}{1-X-X^2}$ *on déduit également que la suite* $d_n = -\frac{c_{n+1}}{n!}$ *vérifie* $d_{n+1} = d_n + d_{n-1}$ *pour* $n \geq 1$*, comme la suite de Fibonacci (mais avec des valeurs initiales différentes :* $d_0 = 1$ *et* $d_1 = 3$*), ce qui est aussi efficace pour calculer les* c_n.

2. Soit $t \in \mathbf{C}$ une constante. On désignera par $(1+X)^t$ la série formelle $\exp(t\log(1+X))$ et par $(\frac{1}{1-X})^t$ la série formelle $\exp(t\log(\frac{1}{1-X}))$. Dans le cours on a fait le calcul $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}((1+X)^t) = t(1+X)^{t-1}$, et on en a déduit que $(1+X)^t = \sum_{n \in \mathbf{N}} t^{\underline{n}} \frac{X^n}{n!}$.

a. Calculer de façon analogue $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}((\frac{1}{1-X})^t) = t(\frac{1}{1-X})^{t+1}$, et en déduire que $(\frac{1}{1-X})^t = \sum_{n \in \mathbf{N}} t^{\overline{n}} \frac{X^n}{n!}$.

b. Écrire les séries formelles $t\log(\frac{1}{1-X})$ et $t\log(1+X)$ sous la forme d'une série génératrice exponentielle $\sum_{n \in \mathbf{N}} g_n \frac{X^n}{n!}$. Développer les termes de ces séries explicitement jusqu'au terme de $\frac{X^5}{5!}$.

c. Dans le cours on a vu que une relation $\sum_{n \in \mathbf{N}} f_n \frac{X^n}{n!} = \exp(\sum_{n \in \mathbf{N}} g_n \frac{X^n}{n!})$ est équivalent à la relation de récurrence $f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i g_{n+1-i}$. Vérifier dans les cas considérés ici que cette relation est effectivement satisfaite pour f_i, $i = 1, 2, 3, 4$ (où donc $f_i = t^{\overline{i}}$ respectivement $f_i = t^{\underline{i}}$).

d. Prouver directement (sans utiliser les séries formelles) que la relation $f_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f_i g_{n+1-i}$ est vérifiée pour tout n dans les cas considérées dans le point précédent. [Indication : écrire les termes de la somme comme des combinaisons linéaires d'expressions $t^{\overline{i}}$, respectivement comme des combinaisons linéaires d'expressions $t^{\underline{i}}$, c'est-à-dire réécrire chaque fois qu'on a un produit de deux tels facteurs.]

3. Soit $(s_{n,k})_{n,k \in \mathbf{N}}$ et $(t_{n,k})_{n,k \in \mathbf{N}}$ deux familles d'entiers naturels, définies par $s_{0,0} = t_{0,0} = 1$, et $s_{n,0} = t_{n,0} = s_{0,k} = t_{0,k} = 0$ pour $n, k > 0$, et par les relations de récurrence sur n :

$$\begin{aligned} s_{n+1,k} &= s_{n,k-1} + ks_{n,k}, \\ t_{n+1,k} &= t_{n,k-1} + nt_{n,k}, \end{aligned} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbf{N} \text{ et } k > 0.$$

(Les $s_{n,k}$ sont les nombres de Stirling de la deuxième espèce, notés $\left\{ {n \atop k} \right\}$ dans le cours), et les $t_{n,k}$ sont les nombres de Stirling de la première espèce sans signe, notés $\left[{n \atop k} \right]$ dans le cours).

a. On forme pour tout $k \in \mathbf{N}$ les séries $S_k = \sum_{n\in\mathbf{N}} s_{n,k}\frac{X^n}{n!}$ et $T_k = \sum_{n\in\mathbf{N}} t_{n,k}\frac{X^n}{n!}$, les séries génératrices exponentielles des suites $(s_{n,k})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(t_{n,k})_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que

$$S_k = \frac{\bigl(\exp(X)-1\bigr)^k}{k!}, \text{et}$$
$$T_k = \frac{\bigl(\log(\frac{1}{1-X})\bigr)^k}{k!}.$$

[Indication : montrer que les relations de récurrence pour les coefficients donnent les relations $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}S_k = S_{k-1} + kS_k$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}T_k = T_{k-1} + X\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}T_k$, avec $S_0 = T_0 = 1$, et montrer que les séries décrites par les expressions données vérifient ces relations.]

b. D'après les expressions trouvées dans le point précédent, on a $(k+1)!S_{k+1} = k!S_k(\exp(X)-1)$. Interpréter cette identité comme une relation de récurrence sur k pour les nombres $s'_{n,k} = k!s_{n,k}$.

$\surd$ *La règle de multiplication de séries génératrices exponentielles, avec* $\exp(X)-1 = \sum_{n>0}\frac{X^n}{n!}$*, donne* $s'_{n,k+1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}s'_{i,k}$ *(l'absence de terme constant dans* $\exp(X)-1$ *explique l'absence de terme* $i=n$ *dans la somme). On pourra restreindre la somme à* $s'_{n,k+1} = \sum_{i=k}^{n-1}\binom{n}{i}s'_{i,k}$ *car* $s'_{i,k} = 0$ *pour* $i<k$*.*

c. La récurrence initiale $s_{n+1,k} = s_{n,k-1} + ks_{n,k}$ entraîne la relation $s'_{n+1,k} = k(s'_{n,k-1} + s'_{n,k})$, d'où (voir la première feuille de TD) $s'_{n,k}$ est le nombre de surjections $[1,n] \to [1,k]$. Avec cette interprétation, expliquer la récurrence du point précédent (on classera les surjections $f : [1,n] \to [1,k+1]$ selon l'image réciproque $f^{-1}[[1,k]]$ du complément $[1,k]$ du dernier point $\{k+1\}$).

$\surd$ *Spécifier l'image réciproque* $f^{-1}[k+1]$ *revient à la même chose que spécifier son complément* $[1,n]\setminus f^{-1}[k+1] = f^{-1}[[1,k]]$*. Comme* $f^{-1}[k+1]$ *n'est pas vide (car* f *est surjectif) ce complément* $f^{-1}[[1,k]]$ *doit être un sous-ensemble propre de* $[1,n]$*. La restriction de* f *à ce complément est une surjection sur* $[1,k]$*, et ayant fixé pour* $f^{-1}[[1,k]]$ *un sous-ensemble de cardinal* $i<n$ *de* $[1,n]$*, il reste* $s'_{i,k}$ *possibilités pour cette restriction. (On peut supposer* $i \geq k$ *car sinon il y a aucune possiblilité pour la restriction.) Ainsi* f *est déterminé (car* $f(x) = k+1$ *pour tout* $x \in f^{-1}[k+1]$*), donc on trouve* $s'_{n,k+1} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}s'_{i,k} = \sum_{i=k}^{n-1}\binom{n}{i}s'_{i,k}$*.*

d. Traduire de façon similaire la relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}(S_{k+1}) = \exp(X)S_k$ en une relation de récurrence sur k pour les nombres $s_{n,k}$.

$\surd$ –