Corrigé Travaux dirigés iL01 : Mathématiques Discrètes, Feuille 4 vendredi 30 septembre 2005

1. Déterminer le nombre d'éléments des ensembles suivants.

a. Les «mots» pouvant être obtenu par permutation des lettres `AAAAAAAABBBBB` (8 `A`, 5 `B`).

$\surd$ *C'est l'une des interprétations du nombre* $C_{13}^5 = \binom{13}{5} = \frac{13^{\underline{5}}}{5!} = \frac{13\times12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4\times5} = 13\times11\times9 = 1287$.

b. $\{\,(X,Y) \in \mathcal{P}([1,8])^2 \mid \#X = 2, \#Y = 5\,\}$ (les couples formés de parties X, Y de $[1,8]$, à 2 et 5 éléments, respectivement).

$\surd$ *Les choix de X et Y sont indépendants, d'où le nombre* $\binom{8}{2} \times \binom{8}{5} = 28 \times 56 = 1568$.

c. $\{\,\{X,Y,Z\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}([1,6])) \mid \#X = \#Y = \#Z = 2, \#\{X,Y,Z\} = 3\,\}$ (les ensembles obtenus en choisissant trois paires distinctes dans $[1,6]$).

$\surd$ *Il y a* $\binom{6}{2} = 15$ *telles paires, dont ont peut former* $\binom{15}{3} = 5 \times 7 \times 13 = 455$ *combinaisons de 3.*

d. $\{\,X \subseteq [1,12] \mid \#X \le 5\,\}$.

$\surd$ $\binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \binom{12}{3} + \binom{12}{4} + \binom{12}{5} = 1 + 12 + 66 + 220 + 495 + 792 = 1586$. *Il existe un autre approche plus rapide : ce nombre N est égal à $\#\{\,X \subseteq [1,12] \mid \#X \ge 7\,\}$ (en prenant les compléments des sous-ensembles), d'où $2N + \binom{12}{6} = 2^{12}$ et $N = \frac{1}{2}(4096 - 924) = 1586$.*

e. $\{\,X \subseteq [1,13] \mid \#X$ est impair $\}$.

$\surd$ *Pour chaque $X \subseteq [1,13]$, précisément un de X et son complément ont un nombre impair d'éléments. Le nombre cherché est donc $\frac{1}{2}2^{13} = 4096$.*

f. $\{\,X \subseteq [1,14] \mid \#X$ est pair $\}$.

$\surd$ *L'argument de la précédente solution ne marche pas ici, mais néanmoins le réponse est $2^{13} = 8192$. Après le choix d'un sous-ensemble quelconque X_0 de $[1,13]$ (pour lequel on a 2^{13} possibilités) on peut obtenir un $X \subseteq [1,14]$ de cardinal pair de façon unique : si $\#X_0$ est déjà pair on prend $X = X_0$, sinon $X = X_0 \cup \{14\}$.*

g. $\{\,X \subseteq [1,10] \mid X \cap \{8,9,10\} \ne \emptyset\,\}$ (les parties de $[1,10]$ contenant au moins un nombre ≥ 8).

$\surd$ *On a $\#\{\,X \subseteq [1,10] \mid X \cap \{8,9,10\} = \emptyset\,\} = \#\mathcal{P}([1,7]) = 2^7$, donc le nombre cherché est $2^{10} - 2^7 = 896$.*

h. $\{\,(c_1,\ldots,c_5) \in \{0,\ldots,9\}^5 \mid$ il existe $i < j$ avec $c_i = c_j\,\}$, c'est-à-dire les suites de 5 chiffres qui contiennent au moins un chiffre répété.

$\surd$ *Des 10^5 suites au total, $10^{\underline{5}}$ sont sans chiffres répétés, d'où la réponse est $100000 - 30240 = 69760$.*

i. Les «mots» pouvant être obtenu par permutation des lettres `AAAAABBBBCC` (5 `A`, 4 `B`, 2 `C`).

$\surd$ *On peut choisir les places des 5 «`A`» de $\binom{11}{5}$ manières, et des 4 «`B`» parmi les 6 places restantes de $\binom{6}{4}$ manières. Au total $\binom{11}{5}\binom{6}{4} = 462 \times 15 = 6930$ mots (le nombre s'écrit aussi $\frac{11!}{5!4!2!}$).*

j. $\{\,(X,Y) \in \mathcal{P}([1,9])^2 \mid \#X = 3, \#Y = 7, X \subseteq Y\,\}$ (les couples formés d'une partie X de $[1,9]$ à 3 éléments, et une partie Y de $[1,9]$, contenant X et 4 éléments supplémentaires).

$\surd$ *On choisit d'abord Y de $\binom{9}{7}$ manières, et ensuite X de $\binom{7}{3}$ manières ; au total $\binom{9}{7}\binom{7}{3} = 36 \times 35 = 1260 = \frac{9!}{3!4!2!}$ manières.*

k. $\{\,M \in \mathbf{R}[X,Y,Z,T] \mid M$ un monôme, $\deg(M) = 7\,\}$, les monômes de degré 7 en 4 indéterminées, où on convient qu'un monôme a par définition un coefficient 1 (sinon le nombre serait infini).

$\surd$ *C'est $\#\{\,X^aY^bZ^cT^d \mid a,b,c,d \in \mathbf{N}, a+b+c+d = 7\,\} = \left(\!\binom{4}{7}\!\right) = \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$.*

l. $\{\,(a_1,\ldots,a_5) \in [1,20]^5 \mid a_{i+1} \ge a_i + 2$ pour $1 \le i < 5\,\}$.

$\surd$ *Ces suites sont plus que strictement croissantes, l'écart de deux éléments successifs étant toujours au moins 2. Pour les dénombrer, on peut réduire systématiquement l'écart par 1 en soustrayant $(0,1,2,3,4)$ de la suite, pour retrouver une suite strictement croissante dont les éléments sont dans $[1,20-4]$. En plus de détail, on définit une bijection de l'ensemble donné vers l'ensemble $\{\,(a_1,\ldots,a_5) \in [1,16]^5 \mid a_1 < a_2 < \cdots < a_5\,\}$ par $(a_1,\ldots,a_5) \mapsto (a_1, a_2-1, a_3-2, a_4-3, a_5-4)$. Le cardinal du dernier ensemble est $\binom{16}{5} = 4368$, c'est aussi le cardinal de l'ensemble donné.*

m. $\{\,(a_1,\ldots,a_6) \in [1,12]^6 \mid a_1 < a_2 \le a_3 < a_4 \le a_5 < a_6\,\}$

$\surd$ *C'est similaire au problème précédent, mais ici les écarts entre a_2, a_3 et entre a_4, a_5 doivent être augmentés par 1. On le fait en ajoutant $(0,0,1,1,2,2)$, le nombre cherché est $\binom{12+2}{6} = 3003$.*

n. $\{\,P \in (\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[X] \mid \deg(P) = 8$, P est unitaire et scindé sur $\mathbf{Z}/5\mathbf{Z}\,\}$.

$\surd$ *C'est $\{\,\prod_{i=0}^4 (X-i)^{c_i} \mid c_0,\ldots,c_4 \in \mathbf{N}, c_0 + \cdots + c_4 = 8\,\}$, dont le cardinal (grâce au fait qu'on a factorisation unique dans $(\mathbf{Z}/5\mathbf{Z})[X]$) est $\left(\!\binom{5}{8}\!\right) = \binom{12}{8} = \binom{12}{4} = 445$.*

2. Démontrer l'identité $\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$, valable pour tout $n > 0$, de trois façons différentes :

a. En considérant la valeur moyenne de $\#X$ pour $X \in \mathcal{P}([n])$.

$\surd$ *La valeur moyenne pour le couple de X et son complément est $\frac{n}{2}$, et comme les $X \in \mathcal{P}([n])$ peuvent tous être regroupés dans de tels couples, c'est aussi la valeur moyenne globale. Ainsi $\frac{n}{2} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}$, dont on déduit directement l'identité cherchée.*

b. Par un argument purement combinatoire, c'est-à-dire en donnant une interprétation des deux membres comme comptant le même ensemble de configurations de deux manières.

$\surd$ *Les configurations sont les suivantes : une partie X de $[n]$, et un élément distingué $x_0 \in X$. En choisissant d'abord X et puis $x_0 \in X$, le nombre de possibilités est $\sum_{X\in\mathcal{P}([n])} \#X = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k}$; en choisissant d'abord $x_0 \in [n]$ et puis l'ensemble $X \setminus \{x_0\}$ des autres éléments de X parmi les $n-1$ nombres restants, le nombre de possibilités est $n2^{n-1}$.*

c. En utilisant la formule du binôme $(X+Y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k Y^{n-k}$.

$\surd$ *On met tout de suite $Y := 1$ pour trouver $(1+X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$. Puis on différencie (formellement) par rapport à X, ce qui donne $n(1+X)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k\binom{n}{k} X^{k-1}$; finalement la substitution $X := 1$ donne l'identité cherchée.*