Corrigé Examen L3 Mathématiques, iL01, Mathématiques Discrètes jeudi 16 juin 2005
9h00–12h00

1. Soit $E = [p]$ et $F = [n]$ avec $1 \leq p \leq n$.

a. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes $f : E \to F$ (donc pour tout $i, j \in E$ avec $i < j$ on a $f(i) < f(j)$.

√ *Une telle application est déterminée par* $\{\, f(i) \mid i \in [p] \,\}$, *une partie de* p *éléments de* $[n]$, *et toute partie de* p *éléments de* $[n]$ *correspond à une telle application (car les images de* $1, 2, \ldots, p$ *sont données par les éléments de la partie, en ordre croissant). Le nombre cherché est donc* $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$.

b. Déterminer le nombre d'applications $E \to F$ qui ne sont pas strictement croissantes.

√ *C'est le complément, dans l'ensemble* F^E *de toutes les applications* $E \to F$, *de l'ensemble de la question précédente. Le nombre cherché est donc* $n^p - \binom{n}{p}$.

c. Déterminer le nombre d'applications $f : E \to F$ qui sont faiblement décroissantes (donc pour tout $i, j \in E$ avec $i < j$ on a $f(i) \geq f(j)$.

√ *Une telle application est déterminée par* $\{\!\{\, f(i) \mid i \in [p] \,\}\!\}$, *un multi-ensemble d'ordre* p *sur* $[n]$, *et toute partie de* p *éléments de* $[n]$ *correspond à une telle application (car les images de* $1, 2, \ldots, p$ *sont données par les éléments de la partie, en ordre décroissant). Le nombre cherché est donc* $\left(\!\binom{n}{p}\!\right) = \frac{n(n+1)\cdots(n+p-1)}{p!}$.

d. Expliquer pourquoi les réponses aux questions b et c doivent être égales dans le cas $p = 2$, et vérifier cela avec les formules trouvées.

√ *Pour* $p = 2$ *on a pour tout* $f : [2] \to [n]$ *précisément un des deux cas* $f(i) < f(j)$ *et* $f(i) \geq f(j)$ *; alors* f *est faiblement décroissant si et seulement si* f *n'est pas strictement croissant. Pour les formules on a* $n^2 - \binom{n}{2} = n^2 - \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \left(\!\binom{n}{2}\!\right)$.

2. Pour $\sigma \in \mathbf{S}_n$ on note $\operatorname{ord}(\sigma) \in [n]$ l'ordre de σ, c'est-à-dire le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\sigma^k = \mathrm{id}$. On pourra admettre que si σ de décompose en cycles disjoints $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l$, alors $\sigma^i = \tau_1^i \circ \cdots \circ \tau_l^i$ pour tout i.

a. Montrer que dans ce cas $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{ppcm}(\operatorname{ord}(\tau_1), \ldots, \operatorname{ord}(\tau_l))$ (où 'ppcm' désigne le plus petit multiple commun).

√ *Les cycles étant disjoints, on n'aura* $\sigma^k = \tau_1^k \circ \cdots \circ \tau_l^k = \mathrm{id}$ *que si* $\tau_i^k = \mathrm{id}$ *pour tout* i, *donc* $\operatorname{ord}(\sigma)$ *est un multiple commun de* $\operatorname{ord}(\tau_1), \ldots, \operatorname{ord}(\tau_l)$. *Réciproquement, si* k *est un multiple commun de* $\operatorname{ord}(\tau_1), \ldots, \operatorname{ord}(\tau_l)$, *alors* $\sigma^k = \tau_1^k \circ \cdots \circ \tau_l^k = \mathrm{id}$. *Comme* $\operatorname{ord}(\sigma)$ *est par définition le plus petit nombre positif tel que* $\sigma^k = \mathrm{id}$, *c'est le plus petit multiple commun de* $\operatorname{ord}(\tau_1), \ldots, \operatorname{ord}(\tau_l)$.

b. En déduire que si $\operatorname{ord}(\sigma)$ est divisible par un nombre premier p, alors au moins un des cycles τ_i est d'une longueur divisible par p.

√ *C'est une propriété du* ppcm: $\operatorname{ppcm}(\operatorname{ord}(\tau_1), \ldots, \operatorname{ord}(\tau_l))$ *divise le produit* $\operatorname{ord}(\tau_1) \cdots \operatorname{ord}(\tau_l)$, *donc pour que le* ppcm *soit divisible par* p *il faut que ce produit soit divisible par* p, *et comme* p *est premier cela sera le cas si et seulement si* p *divise au moins une des longueurs des cycles* τ_i.

c. On suppose maintenant $\sigma \in \mathbf{S}_{10}$ et $\operatorname{ord}(\sigma) = 14$. Déterminer les longueurs des cycles dans la décomposition de σ en cycles disjoints, et calculer $\operatorname{sg}(\sigma)$.

√ *Pour avoir* $\operatorname{ord}(\sigma) = 14$, *il faut qu'un des cycles au moins de* σ *ait une longueur divisible par* 7, *et pour* $\sigma \in \mathbf{S}_{10}$ *ceci n'est possible que pour un seul cycle de longueur* 7. *Par ailleurs sur les trois éléments de* $[10]$ *que ne sont pas dans ce cycle, il faut avoir un cycle de longueur paire, ce qui ne peut être qu'un seul 2-cycle. Il reste dans* $[10]$ *un point fixe. Si* $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2$ *avec* τ_1 *le 7-cycle et* τ_2 *le 2-cycle, alors* $\operatorname{sg}(\sigma) = \operatorname{sg}(\tau_1)\operatorname{sg}(\tau_2) = (+1)(-1) = -1$.

d. Prouver de façon similaire que si $\sigma \in \mathbf{S}_{10}$ et $\operatorname{ord}(\sigma) = 15$, alors $\operatorname{sg}(\sigma) = +1$.

√ *Ici il faut avoir un cycle de longueur divisible par 5 et un cycle de longueur divisible par 3, ce qui se réalise dans* $\mathbf{S}_{10}$ *dans la forme d'un 5-cycle et un 3-cycle. Sur les deux éléments de* $[10]$ *restants* σ *ne peut pas avoir un 2-cycle, sinon l'ordre de* σ *serait* 30. *Donc* $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2$ *avec* τ_1 *un 5-cycle et* τ_2 *un 3-cycle, et* $\operatorname{sg}(\sigma) = \operatorname{sg}(\tau_1)\operatorname{sg}(\tau_2) = (+1)(+1) = +1$.

3. Soit $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'entiers définie de façon récurrente par $t_0 = 4$, $t_1 = 5$ et $t_i = 3t_{i-1} - 2t_{i-2}$ pour $i \geq 2$.

a. Déduire de la récurrence une équation pour la série génératrice $T = \sum_{n\in\mathbf{N}} t_n X^n \in \mathbf{Z}[[X]]$.

$\surd$ *La relation de récurrence dit que pour tout $k \geq 2$ le coefficient de X^k du produit $(1-3X+2X^2)T$ est nul. Ce produit est donc un polynôme de degré au plus 1, qu'on détermine facilement des premiers termes par un calcul modulo X^2 : on obtient $4-7X$. Donc $(1-3X+2X^2)T = 4-7X$.*

b. Exprimer T comme un quotient de deux polynômes.

$\surd$ $T = \frac{4-7X}{(1-3X+2X^2)}$.

c. Factoriser le dénominateur de cette expression comme un produit de facteurs de la forme $(1-\lambda X)$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$. Décomposer ensuite l'expression comme une somme de termes, dont chacun est un quotient avec dénominateur de la forme $(1-\lambda X)$ (décomposition en éléments simples).

$\surd$ *On a $1-3X+2X^2 = (1-X)(1-2X)$. On veut écrire $\frac{1}{(1-X-2X^2)} = \frac{a}{1-X} + \frac{b}{1-2X}$ avec a, b des constantes, ce qui donne l'équation $a(1-2X)+b(1-X) = 4-7X$, qui équivaut au système $a+b=4$, $2a+b=7$ dont la solution est $a=3$, $b=1$. On a trouvé $T = \frac{4-7X}{(1-3X+2X^2)} = \frac{3}{1-X} + \frac{1}{1-2X}$.*

d. Utiliser le résultat du point précédent pour donner une expression explicite pour les nombres t_n.

$\surd$ *En utilisant l'expansion $\frac{1}{1-\lambda X} = \sum_{i\in\mathbf{N}} \lambda^i X^i$ dans $\mathbf{Z}[[X]]$ pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = 2$, on trouve $\sum_{n\in\mathbf{N}} t_n X^n = \sum_{n\in\mathbf{N}} (3+2^n)$, et donc $t_n = 3+2^n$, pour $n \in \mathbf{N}$. On vérifie que les valeurs initiales de cette formule $4, 5, 7, 11, 19, 35, 67, 131, 259, \ldots$ satisfont bien à la relation de récurrence et aux conditions initiales.*

4. Soit $n \geq 2$ et $T \subseteq \mathbf{S}_n$ l'ensemble des transpositions (c'est-à-dire 2-cycles) dans $\mathbf{S}_n$. On définit le graphe $\Gamma_n = (V, E)$, où $V = \mathbf{S}_n$, et $E = \{\, \{\sigma, \sigma\circ\tau\} \mid \sigma \in \mathbf{S}_n, \tau \in T \,\}$ (donc il y a une arête entre deux permutations si l'on peut obtenir l'une en multipliant l'autre à droite par une transposition).

a. Représenter Γ_3 dans un dessin

b. Montrer que Γ_3 est isomorphe au graphe bipartite complet $K_{3,3}$, c'est-à-dire au graphe (V', E') où $V' = [6]$ et $E' = \{1,3,5\} \times \{2,4,6\} \subseteq V' \times V'$.

c. Montrer que pour tout n le graphe Γ_n est connexe.

$\surd$ *Si l'on commence à 'id', une promenade suivant des arêtes données par les multiplications à droite par $\tau_1, \ldots, \tau_l$ se termine dans la permutation $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_l$; la question est donc si toute permutation dans $\mathbf{S}_n$ s'écrit donc de telle façon. Or on sait que toute permutation s'écrit comme une composée de transpositions, donc Γ_n est bien connexe.*

d. Montrer que pour tout n le graphe Γ_n est bipartite.

$\surd$ *On partitionne $\mathbf{S}_n$ en permutations paires et impaires ; alors comme $\mathrm{sg}(\tau) = -1$ pour toute transpositions, une arête $\{\sigma, \sigma\circ\tau\}$ relie toujours des permutations de signatures opposées, ce qui montre que Γ_n est bipartite.*

e. Montrer que pour tous les sommets $\sigma \in \mathbf{S}_n$ le sommet a le même degré, qu'on spécifiera.

$\surd$ *Pour σ fixe, les permutations $\sigma\circ\tau_1$ et $\sigma\circ\tau_2$ pour des transpositions $\tau_1 \neq \tau_2$ sont toujours distinctes (on pourra multiplier à gauche par σ^{-1}), donc le degré de σ (son nombre de voisins) est égal au nombre de transpositions dans $\mathbf{S}_n$, ce qui est $\binom{n}{2}$.*

f. Pour quelles valeurs de n le graphe Γ_n est-il eulerien ?

$\surd$ *Pour cela il faut et il suffit (car Γ_n est connexe) que le degré de chaque sommet soit pair, donc $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ doit être pair, ce qui revient à dire que $n(n-1)$ doit être divisible par 4. Comme l'un de $\{n, n-1\}$ est toujours impair, cela veut dire que l'autre doit être divisible par 4, donc Γ_n est-il eulerien si et seulement si $n \equiv 0$ ou $n \equiv 1$ modulo 4.*

Fin.