Corrigé Examen Géométrie Élémentaire (L2) mardi 15 mai 2018
14h-16h

1. On considère un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3, muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{O}'$ le point dont les coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$ sont $(3, -5, 2)$, et soient $\vec{u} = \vec{\imath} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}$, et $\vec{w} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, alors $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un autre repère cartésien (on l'admet). Si les coordonnées d'un point P par rapport au repère $\mathcal{R}'$ sont $(2, -3, 4)$, quelles sont ses coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$?

$\surd$ $(3, -5, 2) + 2(1, 0, -2) - 3(2, -3, -1) + 4(-2, 1, -1) = (-9, 8, -3)$

2. Dans $\mathbf{R}^2$, qu'on considère ici comme un plan affine, soient A, B, C, D les sommets du carré unité, c'est-à-dire $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (1, 1)$, et $D = (0, 1)$.

a. Déterminer le point L d'intersection des droites $\mathcal{D}_{A,C}$ et $\mathcal{D}_{B,E}$, où $E = \mathrm{bar}(A, D)$.

$\surd$ *On pourra par exemple trouver les équations $x = y$ et $x + 2y = 1$ qui décrivent ces deux droites, et résoudre le système pour trouver le point d'intersection : $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, donc $L = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.*

b. Montrer que les points $F = \mathrm{bar}(A, B)$, L, et D sont alignés.

$\surd$ *On a $F = (\frac{1}{2}, 0)$ donc il s'agit de vérifier que $(\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $(0, 1)$ sont alignés. Cela peut se faire par exemple en établissant $F + 3\overrightarrow{FL} = (\frac{1}{2}, 0) + 3(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}) = (0, 1) = D$, ou en calculant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

c. Monter plus généralement que pour un parallélogramme A, B, C, D dans un plan affine, les points $F = \mathrm{bar}(A, B)$, le point L d'intersection des droites $\mathcal{D}_{A,C}$ et $\mathcal{D}_{B,\mathrm{bar}(A,D)}$ et le point D sont alignés.

$\surd$ *Si l'on choisit le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$, les coordonnées des points A, B, C, D, E, F et L seront précisément les points du même nom dans la première partie de cet exercice, et F, L et D seront alignés car leurs coordonnées vérifient cette propriété (le même déterminant s'annule).*

3. Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien de dimension 3, muni d'un repère euclidien $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Décrire concrètement (par une équation en coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$, ou par une forme paramétrique, selon votre préférence) le plan médiateur entre les points A et B, où A est le point aux coordonnées $(3, 1, 4)$, et B le point aux coordonnées $(5, -3, -2)$ (toujours par rapport à $\mathcal{R}$).

$\surd$ *Ce plan médiateur est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui a coordonnées $(2, -4, -6)$ par rapport à la base $[\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}]$ de $\vec{\mathcal{E}}$, et il passe par le point $\mathrm{bar}(A, B)$ de coordonnées $(4, -1, 1)$. D'après le premier constat on peut donner une équation de la forme $2x - 4y - 6z = d$ pour un certain réel d, et d'après le second constat il faut alors prendre $d = 2 \times 4 - 4 \times -1 - 6 \times 1 = 8 + 4 - 6 = 6$ (pour que $(x, y, z) = (4, -1, 1)$ vérifie l'équation). On peut diviser l'équation 2, pour trouver l'équation équivalente $x - 2y - 3z = 3$.*

4. Dans un plan affine, un triangle de sommets A, B, C est donné, ainsi qu'un nombre réel $\lambda > 1$. On considère l'homothétie h de centre A et de facteur λ, et on pose $B' = h(B)$ et $C' = h(C)$. Ainsi les points B, C, C', B' forment les côtés d'un trapèze dont $\mathcal{D}_{B,C}$ et $\mathcal{D}_{B',C'}$ sont les côtés parallèles, et dont les deux autres côtés $\mathcal{D}_{B,B'}$ et $\mathcal{D}_{C,C'}$ se coupent en A.

a. Montrer que le point A et les milieux $\mathrm{bar}(B, C)$ et $\mathrm{bar}(B', C')$ sont alignés.

$\surd$ *L'homothétie h est une application affine, donc est compatible avec le calcul des barycentres : $\mathrm{bar}(B', C') = \mathrm{bar}(h(B), h(C)) = h(\mathrm{bar}(B, C))$, et par conséquent A (le centre de h), $\mathrm{bar}(B, C)$ et $\mathrm{bar}(B', C')$ (l'image de $\mathrm{bar}(B, C)$ par h) sont alignés.*

b. Soit P le point d'intersection des diagonales $\mathcal{D}_{B,C'}$ et $\mathcal{D}_{B',C}$ du trapèze. Montrer que P se trouve aussi sur la droite passant par A, $\mathrm{bar}(B,C)$ et $\mathrm{bar}(B',C')$ (celle de la question *a*).

$\surd$ *L'argument le plus simple est un argument de symétrie : il existe un application affine f qui fixe A et intervertit B et C (autrement dit f envoie le repère affine $[A,B,C]$ sur le repère affine $[A,C,B]$), et les points fixes de f forment la droite $\mathcal{D}_{A,\mathrm{bar}(B,C)}$ (comme $f(A)=A$ et $f(\mathrm{bar}(B,C))=\mathrm{bar}(C,B)=\mathrm{bar}(B,C)$ cette droite est contenu dans $\mathrm{Fix}(f)$, et $\dim(\mathrm{Fix}(f))<3$ car par exemple $B\notin\mathrm{Fix}(f)$). Or on voit facilement $f(C')=B'$, donc $f(\mathcal{D}_{B,C'})=\mathcal{D}_{B',C}$ et pareillement $f(\mathcal{D}_{B',C})=\mathcal{D}_{B,C'}$, d'où le point P d'intersection de ces deux droites interverties par f est un point fixe de f, c'est-à-dire $P\in\mathcal{D}_{A,\mathrm{bar}(B,C)}$.*

On peut aussi calculer la position du point P explicitement et constater qu'il se trouve sur la droite $\mathcal{D}_{A,\mathrm{bar}(B,C)}$. Par rapport au repère cartésien $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$, les coordonnées de A,B,C sont respectivement $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$; celles de B' et C' sont respectivement $(\lambda,0)$ et $(0,\lambda)$. En en tire que $\mathcal{D}_{B,C'}$ est décrit par l'équation $\lambda x+y=\lambda$, et $\mathcal{D}_{B',C}$ par l'équation $x+\lambda y=\lambda$. Le système des deux équation a pour solution $x=y=\frac{\lambda}{1+\lambda}$, ce qui donne les coordonnées de P, et qui est situé en particulier sur la droite $\mathcal{D}_{A,\mathrm{bar}(B,C)}$ dont l'équation est $x=y$.

5. On se place dans un plan euclidien $\mathcal{P}$, où sont donné deux points distincts A,B. On cherche à décrire l'ensemble
$$\mathcal{C}=\{\,P\in\mathcal{P}\mid(\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{BP})\perp(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP})\,\}$$
(ici « $\perp$ » désigne la relation d'orthogonalité entre deux vecteurs).

a. On pose $\vec{p}=\overrightarrow{AP}$; traduire la condition $P\in\mathcal{C}$ en une équation dans laquelle $\vec{p}$ est l'unique inconnue (les autres quantités dans l'équation ne peuvent donc pas dépendre du point P).

$\surd$ *Par Chasles on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}$ donc $\overrightarrow{BP}=\vec{p}-\overrightarrow{AB}$. Alors $\langle\overrightarrow{AP}-2\overrightarrow{BP}\mid\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}\rangle$ donne $\langle\vec{p}-2(\vec{p}-\overrightarrow{AB})\mid\vec{p}+\vec{p}-\overrightarrow{AB}\rangle=0$ se qui se simplifie à $\langle 2\overrightarrow{AB}-\vec{p},2\vec{p}-\overrightarrow{AB}\rangle=0$ et ensuite à*
$$-2\langle\vec{p}\mid\vec{p}\rangle+5\langle\vec{p}\mid\overrightarrow{AB}\rangle-2\langle\overrightarrow{AB}\mid\overrightarrow{AB}\rangle=0\qquad\textit{ou encore}\qquad\langle\vec{p}\mid\vec{p}\rangle-\frac{5}{2}\langle\vec{p}\mid\overrightarrow{AB}\rangle+\langle\overrightarrow{AB}\mid\overrightarrow{AB}\rangle=0.$$

b. On suppose maintenant que la distance $\overline{AB}$ est 4. Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on déterminera le centre et le rayon. [Indication : on pourra choisir un repère euclidien adapté à la situation et écrire l'équation en termes de coordonnées de $P\in\mathcal{C}$ par rapport à ce repère.]

$\surd$ *On choisit $\vec{\imath}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ (un vecteur de norme 1), et on choisit $\vec{\jmath}$ pour compléter à une base orthonormée, alors dans le repère euclidien $(A,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le point P a les mêmes coordonnées que le vecteur $\vec{p}$, appelons les (x,y), et $\overrightarrow{AB}$ a coordonnées $(4,0)$. L'équation de la question précédente devient en coordonnées $x^2+y^2-\frac{5}{2}(4x+0y)+(4^2+0^2)=0$, ou $(x-5)^2+y^2-9=0$. C'est l'équation d'un cercle dont le centre a coordonnées $(5,0)$ (donc c'est $A+\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ ce centre) et dont le rayon est 3.*

Fin.